



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA - IME
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
TESE DE DOUTORADO



Sobre Sistemas Dissipativos com Amortecimento do Tipo Derivada Fracionária: dos Semigrupos aos Processos Evolutivos

Rafael Oliveira de Jesus

SALVADOR, BA

Dezembro de 2025

Rafael Oliveira de Jesus

**Sobre Sistemas Dissipativos com Amortecimento do Tipo Derivada
Fracionária: dos Semigrupos aos Processos Evolutivos**

Tese de Doutorado apresentada ao colegiado do curso de Doutorado em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática.

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA

Orientador: Carlos Alberto Raposo da Cunha

SALVADOR, BA

Dezembro de 2025

Rafael Oliveira de Jesus

Sobre Sistemas Dissipativos com Amortecimento do Tipo Derivada Fracionária: dos Semigrupos aos Processos Evolutivos

Tese de Doutorado apresentada ao colegiado do curso de Doutorado em Matemática da Universidade Federal da Bahia, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Aprovada em 17/12/2025 pela seguinte comissão examinadora

Documento assinado digitalmente
 CARLOS ALBERTO RAPOSO DA CUNHA
Data: 07/01/2026 15:50:27-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha
(Orientador) – UFBA**

Documento assinado digitalmente
 JOILSON OLIVEIRA RIBEIRO
Data: 07/01/2026 16:12:18-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof. Dr. Joilson Oliveira Ribeiro
(Co-orientador) – UFBA**

Documento assinado digitalmente
 ARTHUR CAVALCANTE CUNHA
Data: 06/01/2026 20:29:57-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Arthur Cavalcante Cunha

IICDA
Documento assinado digitalmente
 MIRELSON MARTINS FREITAS
Data: 07/01/2026 09:32:54-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Mirelson Martins Freitas

UNB
Documento assinado digitalmente
 HAROLDO RODRIGUES CLARK
Data: 07/01/2026 09:12:49-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof. Dr. Haroldo Rodrigues Clark
UFDPar**

SALVADOR, BA

Dezembro de 2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal da Bahia
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

D722c de Jesus, Rafael Oliveira.

Sobre Sistemas Dissipativos com Amortecimento do Tipo Derivada Fracionária: dos Semigrupos aos Processos Evolutivos / Rafael Oliveira de Jesus. – SALVADOR, BA, Dezembro de 2025
224 f. : il. color

Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA - UFBA, SALVADOR, BA, Dezembro de 2025.
Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha

1. Equações de Evolução. 2. Derivada Fracionária. 3. Semigrupos. 4. Processos Evolutivos. 5. Comportamento Assintótico. 6. Atratores. 7. Problemas Não-Autônomos. I. da Cunha, Carlos Alberto Raposo. Orient. II. Universidade Federal da Bahia. III. Instituto de Matemática e Estatística. IV. Sobre Sistemas Dissipativos com Amortecimento do Tipo Derivada Fracionária: dos Semigrupos aos Processos Evolutivos

*À minha mãe, Edilene.
À minha esposa, Monique.
Às minhas filhas, Sophia e Elis.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar, expresso minha profunda gratidão ao meu orientador, Professor Carlos Raposo da Cunha. Agradeço por ter me aceitado como orientando ainda antes de minha admissão formal no programa de doutorado da UFBA, em um momento em que eu ainda aguardava o afastamento de minhas atividades na UPE. Saliento que, sem a compreensão e a boa vontade do Professor Raposo, eu provavelmente não teria iniciado esta jornada que hoje culmina na defesa deste trabalho.

Sua orientação foi fundamental não apenas para a elaboração e escrita desta tese. Foi com ele que aprendi as ferramentas e habilidades necessárias para a pesquisa na área de Equações de Evolução, seja nos incontáveis encontros semanais que ele dedicadamente realizava, seja nas disciplinas de EDP e Tópicos em Análise que ministrou. Esses alicerces foram essenciais para que, seguindo seu exemplo, eu me tornasse um pesquisador dedicado e produtivo. Sou profundamente grato pela base sólida que construímos juntos.

Agradeço igualmente ao meu co-orientador, Professor Joilson Oliveira Ribeiro, pelo essencial suporte, disponibilidade e contribuições valiosas ao longo de todo este processo.

Direciono meus agradecimentos aos professores das disciplinas que cursei no doutorado, que foram cruciais para minha formação:

Ao Professor Thiago Bomfim São Luiz Nunes, pelo belíssimo e desafiador curso de Análise Funcional, realizado durante o verão, que serviu como minha avaliação de ingresso no programa. Essa disciplina foi fundamental para ampliar significativamente meus conhecimentos prévios em análise.

Ao Professor Benigno Oliveira Alves, com quem cursei as disciplinas de Análise em Variedades e Grupos de Lie, e Geometria Riemanniana. Estas foram fundamentais para sanar uma carência da minha formação durante o mestrado, suprida no doutorado com muito esforço, e com a indispensável ajuda e paciência do Professor Benigno.

Ao Professor Arthur Cavalcante Cunha, a quem agradeço de forma especial. Através de encontros e palestras, o Professor Arthur me apresentou a teoria de semigrupos não lineares. Posteriormente, em sua disciplina de Equações de Evolução Não linear, pude conhecer uma teoria ainda mais geral: a de Processos Evolutivos para problemas não autônomos. O conhecimento que adquiri com ele generalizou e ampliou a teoria de semigrupos de operadores lineares limitados, base inicial que

aprendi com meu orientador, Professor Carlos Raposo. É justo afirmar que, sem as contribuições do Professor Arthur, esta tese não teria a profundidade que possui, e os dois últimos capítulos não abordariam problemas da natureza que foram abordados. Sou imensamente grato a ele.

Agradeço também aos colegas do doutorado com os quais convivi diariamente na Sala 282 do IME, pelo companheirismo, pelas discussões frutíferas e pelo ambiente de camaradagem.

Por fim, mas não menos importante, meus agradecimentos mais sinceros e profundos vão para minha família, alicerce de toda a minha trajetória. À minha mãe, Edilene Oliveira de Jesus, por todo o amor, apoio incondicional e por sempre acreditar em mim. À minha esposa, Monique Evans Trindade de Jesus Oliveira, por todo o suporte, paciência, compreensão e parceria nos momentos mais desafiadores. E às minhas filhas, Ayla Sophia Trindade de Jesus Oliveira e Yara Elis Trindade de Jesus Oliveira, que são minha maior inspiração e motivo de orgulho. A vocês, dedico este trabalho.

*“A matemática é a única ciência exata em que nunca se sabe do que se está a falar,
nem se aquilo que se diz é verdadeiro.”*

*Bertrand Russell
★ 1872 — † 1970*

Resumo

Este trabalho aborda a análise de três problemas de evolução com amortecimento do tipo derivada fracionária, investigando a existência, unicidade e comportamento assintótico das soluções.

O primeiro problema consiste em um modelo linear e autônomo unidimensional de uma ponte suspensa, cujo deck é modelado pela Teoria de Vigas de Timoshenko. O sistema incorpora amortecimentos internos fracionários em cada uma de suas equações. Para este modelo, aplicou-se a Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares Limitados para demonstrar a existência e unicidade de solução global. A análise assintótica revelou que o decaimento da energia do sistema não é exponencial, mas sim polinomial.

O segundo problema trata de um modelo abstrato não linear e autônomo em dimensão N para uma ponte suspensa, onde o deck é regido pela teoria de vigas de Kirchhoff e o amortecimento fracionário é novamente aplicado. A prova da existência de solução local foi obtida através da Teoria Clássica de Semigrupos. A demonstração de que esta solução é global (ou seja, não explode em tempo finito) foi realizada por meio de estimativas de energia para os termos da norma das soluções. A análise do comportamento de longo prazo foi conduzida via Teoria de Semigrupos de Operadores Contínuos (sistemas dinâmicos), onde se provou a existência de um conjunto compacto atrator que atrai todas as soluções do sistema.

Por fim, o terceiro problema analisa um modelo não linear e não autônomo de equação de onda com condição de fronteira acústica, sujeito a um amortecimento interno não linear e um amortecimento do tipo derivada fracionária na fronteira. A existência de solução local foi estabelecida combinando a Teoria de Semigrupos com a Teoria dos Sistemas CD (de Cauchy-Duhamel) de Kato. A prova de que estas soluções são globais novamente decorreu de estimativas de energia. Para o estudo assintótico, utilizou-se a Teoria de Processos Evolutivos, que generaliza a noção de semigrupos para o contexto não autônomo. Por meio desta teoria, demonstrou-se que as soluções admitem uma família tempo-dependente de conjuntos compactos (um atrator pullback) que atrai as trajetórias no sentido pullback, isto é, quando as soluções evoluem a partir de condições iniciais tomadas em tempos cada vez mais remotos no passado.

Palavras-chave: Equações de Evolução, Derivada Fracionária, Semigrupos, Processos Evolutivos, Comportamento Assintótico, Atratores, Problemas Não-Autônomos.

Abstract

This work addresses the analysis of three evolution problems with fractional derivative-type damping, investigating the existence, uniqueness, and asymptotic behavior of solutions.

The first problem consists of a one-dimensional linear and autonomous model of a suspension bridge, whose deck is modeled by Timoshenko Beam Theory. The system incorporates fractional damping terms in each of its equations. For this model, the Theory of Semigroups of Bounded Linear Operators was applied to demonstrate the existence and uniqueness of global solution. The asymptotic analysis revealed that the energy decay of the system is not exponential but rather polynomial.

The second problem addresses an abstract, nonlinear, autonomous N-dimensional model for a suspension bridge, governed by Kirchhoff plate theory for the deck and again subject to fractional damping. The proof of local solution existence was achieved using Classical Semigroup Theory. The demonstration that this solution is global (i.e., does not blow up in finite time) was carried out via energy estimates for the solution norms. The long-term behavior analysis was conducted using the Theory of Nonlinear Semigroups of continuous operators (dynamical systems), which established the existence of a compact global attractor that attracts all system trajectories.

Finally, the third problem analyzes a nonlinear and non-autonomous wave equation model with an acoustic boundary condition, subject to a nonlinear internal damping and a fractional derivative-type damping on the boundary. The existence of a local solution was established by combining Semigroup Theory with Kato's Cauchy-Duhamel (CD) Systems Theory. The proof that these solutions are global again followed from energy estimates. For the asymptotic study, the Theory of Evolutionary Processes, which generalizes the notion of semigroups to the non-autonomous context, was used. Through this theory, it was demonstrated that the solutions admit a time-dependent family of compact sets (a pullback attractor) that attracts the trajectories in the pullback sense, i.e., when solutions evolve from initial conditions taken at times increasingly remote in the past.

Keywords: Evolution Equations, Fractional Derivative, Semigroups, Evolutionary Processes, Asymptotic Behavior, Attractors, Non-Autonomous Problems.

Sumário

INTRODUÇÃO	1	
1	DISTRIBUIÇÕES E ESPAÇOS DE SOBOLEV	5
1.1	O Espaço das Funções Testes e as Distribuições	6
1.1.1	Funções Testes	6
1.1.2	Distribuições	9
1.2	Os Espaços de Sobolev	14
1.2.1	Espaços de Sobolev	15
1.2.2	Imersões de Sobolev	21
1.2.3	Distribuições Veoriais e Espaços de Sobolev Vetoriais	24
1.3	Distribuições Temperadas e Espaços de Sobolev Fracionário	26
1.3.1	Distribuições Temperadas	27
1.3.2	Espaços de Sobolev Fracionários	30
1.3.3	O Teorema do Traço	35
2	A TEORIA DE SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES LIMITADOS E O PROBLEMA ABSTRATO DE CAUCHY	37
2.1	Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares Limitados	38
2.1.1	A Função Exponencial	39
2.1.2	Semigrupo Uniformemente Contínuo e Semigrupo Fortemente Contínuo	41
2.2	O Problema abstrato de Cauchy	46
2.2.1	Problema abstrato de Cauchy não homogêneo	48
2.2.2	Problema abstrato de Cauchy não-autônomo	51
2.3	Teoremas de Geração e Estabilidade de Semigrupos	54
2.3.1	Teoremas de Geração de Semigrupos	55
2.3.2	Teoremas de Estabilidade para Semigrupos	56
3	DINÂMICA NÃO LINEAR AUTÔNOMA E NÃO-AUTÔNOMA	61
3.1	Teoria Semigrupos de Operadores não Lineares Contínuos	62
3.1.1	Semigrupo de Operadores Contínuos Sobre um Espaço Métrico	64
3.1.2	Conjuntos ω -limites e Existência de Atrator Global	70
3.1.3	Semigrupo Gradiente e Função de Lyapunov	73
3.2	Teoria de Processos de Evolução	75

3.2.1	Processos de Evolução	77
3.2.2	Conjuntos ω -limites e Existência de Atrator Pullback	83
3.2.3	Atratores Pullback com Bacias de Atração mais Gerais	85
4	SOBRE UM SISTEMA DE PONTE SUSPENSA DO TIPO TIMOSHENKO COM AMORTECIMENTO INTERNO FRACIONÁRIO	89
4.1	Derivada Fracionária e Modelo Ampliado	93
4.1.1	Derivada de Ordem Fracionária	93
4.1.2	Modelo Ampliado	97
4.2	Boa-Colocação	103
4.2.1	Formulação do Semigrupo	103
4.2.2	Existência e Unicidade de Solução	108
4.3	Comportamento Assintótico	115
4.3.1	Análise Espectral	115
4.3.2	Estabilidade Forte e Falta de Estabilidade Uniforme	121
4.3.3	Estabilidade Polinomial	125
5	SOBRE UM MODELO ABSTRATO E NÃO-LINEAR DE PONTE SUSPENSA DO TIPO KIRCHHOFF COM AMORTECIMENTO INTERNO FRACIONÁRIO	133
5.1	Boa-Colocação	136
5.1.1	Formulação do Semigrupo da Parte Linear e Existência de Solução Local	137
5.1.2	Existência e Unicidade de Solução Global	145
5.2	Existência de Atrator Global	153
5.2.1	Formulação do Semigrupo Não Linear	154
5.2.2	Existência de Atrator Global	154
6	SOBRE UM MODELO NÃO AUTÔNOMO DE EQUAÇÃO DE ONDA COM CONDIÇÃO DE FRONTEIRA ACÚSTICA E SOBRE O EFEITO DE AMORTECIMENTO INTERNO NÃO LINEAR E AMORTECIMENTO DO TIPO DERIVADA FRACIONÁRIA NA FRONTEIRA.	167
6.1	Boa-Colocação	172
6.1.1	Formulação do Processo Evolutivo Linear	173
6.1.2	Existência de Solução Local	174
6.1.3	Existência e Unicidade de Solução Global	182
6.2	Existência de Atrator Pullback	192
6.2.1	Formulação do Processo de Evolução	192
6.2.2	Existência de Atrator Pullback	193
REFERÊNCIAS	213	
APÊNDICE A	RESULTADOS CLÁSSICOS	219

Introdução

A teoria das Equações Diferenciais Parciais (EDPs) ocupa um papel central na matemática moderna, funcionando como um ponto de convergência entre diversas áreas, como análise funcional, teoria da medida, geometria diferencial, ciência da computação, mecânica dos fluidos, biologia e matemática financeira. As EDPs são ferramentas fundamentais para modelar fenômenos complexos, como a propagação de ondas, a difusão de calor, o comportamento de fluidos e a dinâmica populacional. Contudo, a natureza intrinsecamente singular de muitas dessas equações frequentemente exige a ampliação das noções clássicas de derivadas e funções.

Nesse contexto, os conceitos de derivada fraca e distribuições tornam-se essenciais. Sergei Sobolev introduziu a noção de derivada fraca, permitindo o tratamento de funções integráveis que, embora não possuam derivadas no sentido clássico, admitem-nas no sentido fraco. Esse avanço deu origem aos espaços de Sobolev, que constituem o ambiente natural para estudar a existência, a unicidade e a regularidade das soluções de muitos problemas envolvendo EDPs. Posteriormente, Laurent Schwartz expandiu essa ideia ao desenvolver a teoria das distribuições, que estende a noção de derivada para objetos mais gerais, como funções com singularidades pontuais, oferecendo uma base sólida para problemas nos quais as soluções clássicas são inadequadas.

Embora a teoria dos espaços de Sobolev e das distribuições tenha consolidado um arcabouço conceitual importante para problemas estacionários e evolutivos, a análise rigorosa da dinâmica temporal das EDPs exige ferramentas matemáticas mais avançadas. Nesse cenário, a teoria de semigrupos de operadores emerge como uma abordagem unificadora e poderosa para tratar problemas de evolução. Seu principal mérito está em padronizar a técnica de resolução de uma ampla classe de EDPs, formulando-as como problemas de valor inicial de Cauchy em espaços funcionais apropriados, como os espaços de Sobolev. Ao imitar a estratégia utilizada no estudo de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), a teoria de semigrupos fornece uma estrutura sistemática para estudar a evolução temporal das soluções, abstraindo as particularidades das equações individuais.

Para problemas autônomos lineares, onde as propriedades do sistema não variam no tempo, a teoria de semigrupos de operadores lineares limitados oferece ferramentas fundamentais para garantir a existência e unicidade das soluções, além de investigar seu comportamento assintótico. A estabilidade desses semigrupos permite caracterizar a dissipação de energia e o comportamento de longo prazo de fenômenos como a difusão de calor ou a propagação de ondas.

A relevância da teoria, no entanto, não se restringe ao caso linear. Sua extensão para semigrupos de operadores contínuos em espaços métricos proporciona uma abordagem robusta para problemas autônomos não lineares, nos quais métodos clássicos falham. Nesse contexto, o conceito de atrator global desempenha um papel crucial ao descrever a dinâmica assintótica das soluções em sistemas dissipativos. O atrator global é um conjunto compacto e invariante que atrai todas as trajetórias provenientes de conjuntos limitados, fornecendo uma descrição abrangente da dinâmica de longo prazo.

Quando o foco recai sobre problemas não autônomos, cuja dinâmica varia explicitamente no tempo, a teoria de processos evolutivos torna-se a ferramenta mais adequada. Essa teoria generaliza a de semigrupos ao lidar com operadores dependentes do tempo, permitindo uma análise detalhada de sistemas afetados por variações externas, como mudanças ambientais, dinâmicas sazonais ou perturbações. Nesse cenário, surgem diferentes noções de atratores, sendo os mais amplamente utilizados o atrator pullback e o atrator uniforme. O atrator pullback descreve como o comportamento das soluções é atraído a partir do passado, considerando explicitamente a dependência temporal do sistema. Já o atrator uniforme fornece uma visão global do comportamento assintótico, abstraindo as variações temporais específicas.

Portanto, a força da teoria de semigrupos e de processos evolutivos está em sua capacidade de unificar e padronizar técnicas para o estudo de EDPs. Essas teorias oferecem ferramentas versáteis para a análise de existência, unicidade e comportamento temporal das soluções, abrangendo tanto problemas lineares quanto não lineares, autônomos e não autônomos. Além disso, proporcionam uma compreensão detalhada da dinâmica assintótica das soluções, seja pela estabilidade de semigrupos lineares, pelo estudo de atratores globais em semigrupos contínuos ou pelas diferentes noções de atratores, como o pullback e o uniforme, nos processos evolutivos.

O presente trabalho tem como objetivo principal estudar sistemas de equações diferenciais parciais de evolução dissipativas, nos quais a dissipação é oriunda de amortecimentos do tipo derivada de ordem fracionária. Para atingir esse objetivo, faz-se uso das teorias padronizadas dos semigrupos de operadores lineares limitados (para problemas lineares), de semigrupos de operadores contínuos (para problemas não lineares) e da teoria de processos evolutivos (para problemas não autônomos).

Além disso, pretende-se que o texto seja autossuficiente. Para tanto, inicialmente é apresentada, de forma sucinta e completa, a teoria das distribuições e dos espaços de Sobolev, que constituem o ambiente natural para as soluções das equações estudadas. Em seguida, são desenvolvidas as três teorias unificadoras mencionadas. O texto também contém um apêndice com resultados matemáticos auxiliares utilizados na resolução dos problemas.

Essas teorias serão aplicadas nos três últimos capítulos desta tese, cada um empregando uma delas para estudar um problema de natureza diferente. Os problemas estudados serão, respectivamente: um problema linear e autônomo; um problema não linear e autônomo; e, por fim, um

problema não linear e não autônomo. Além da boa colocação dos problemas, utilizam-se as teorias de semigrupos e de processos evolutivos para estudar o comportamento assintótico das soluções do problema linear autônomo, a existência de atrator global para o problema não linear e autônomo e a existência de atrator pullback para o problema não linear e não autônomo.

No Capítulo 1, são apresentados os espaços funcionais que constituem o ambiente das soluções das EDPs estudadas, a saber: as Distribuições e os espaços de Sobolev. As principais referências utilizadas neste capítulo foram (RUDIN, 1991), (CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009) e (MEDEIROS; MIRANDA, 2000).

No Capítulo 2, apresentamos a teoria de semigrupos de operadores lineares limitados. Por meio dessa teoria, obtemos resultados de existência e unicidade de soluções para o problema abstrato de Cauchy linear autônomo, os quais serão aplicados ao problema (4.1)–(4.3), tratado no Capítulo 4. Além disso, a teoria fornece resultados sobre estabilidade de semigrupos, que serão utilizados para garantir o decaimento da energia associada ao mesmo problema. Essa estrutura teórica também permitirá estudar a boa colocação dos problemas (5.3)–(5.6) e (6.2)–(6.6), abordados nos Capítulos 5 e 6, respectivamente. Tais estudos serão realizados por meio de resultados de existência e unicidade para casos particulares de problemas abstratos de Cauchy não lineares ou não autônomos. Para o desenvolvimento deste capítulo, foram consultadas as seguintes referências: os livros (PAZY, 1983), (LIU; ZHENGZ, 2011) e (AMMARI; SHEL, 2002), bem como os artigos (ARENDE; BATTY, 1988), (BORICHEV; TOMILOV, 2010) e (GEARHART, 1978). Para o estudo de soluções de problemas não lineares ou não autônomos, utilizamos também (PAZY, 1983) e (KATO, 1985).

No Capítulo 3, apresentamos a teoria de semigrupos de operadores contínuos sobre um espaço métrico para problemas não lineares, e a teoria de processos evolutivos para problemas não autônomos. O foco dessas teorias recai sobre o estudo da dinâmica (comportamento assintótico) das soluções. Elas serão aplicadas na análise da existência de atrator global e da existência de atrator pullback para os respectivos problemas (5.3)–(5.6) e (6.2)–(6.6), tratados nos Capítulos 5 e 6. Para a teoria de semigrupos de operadores contínuos e o estudo da existência de atrator global, utilizamos as referências (ROBINSON, 2011), (ROBINSON, 2001), (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2013), (CHUESHOV; LASIECKA, 2008) e (CHUESHOV; LASIECKA, 2010). Já para o estudo da teoria de processos evolutivos em problemas não autônomos e da existência de atrator pullback, utilizamos (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2013).

No Capítulo 4, estudamos a boa colocação e o comportamento assintótico de um sistema linear e autônomo de ponte suspensa, cujo deck é modelado pela teoria de vigas de Timoshenko, sob a influência de dissipações internas do tipo derivada fracionária. Para isso, utilizamos a teoria de semigrupos de operadores lineares limitados, apresentada de forma sucinta na primeira seção do Capítulo 2. A existência e unicidade de solução são estabelecidas por meio do Teorema de Lumer-Phillips, a partir de um operador que gera o semigrupo associado ao sistema em estudo. Em seguida, exploramos as propriedades espectrais desse operador, essenciais para a aplicação do

Teorema de Borichev-Tomilov, a fim de obter uma taxa polinomial de decaimento das soluções. Além disso, utilizamos o Teorema de Gearhart para mostrar que as soluções não apresentam decaimento exponencial.

No Capítulo 5, estudamos um modelo abstrato (N -dimensional), não linear e autônomo, de ponte suspensa cujo deck é modelado pela teoria de vigas de Kirchhoff, sob o efeito de dissipações internas do tipo derivada fracionária. Utilizamos a teoria de semigrupos de operadores contínuos para tratar a parte linear do problema, aplicando o Teorema de Lumer-Phillips para mostrar que essa parte linear gera um C_0 -semigrupo de contrações. Mostramos também que a parte não linear do problema define um operador localmente Lipschitz, o que garante a existência e unicidade de solução local. A solução global é obtida a partir de estimativas de energia, que asseguram que as soluções não explodem em tempo finito e, portanto, estão definidas globalmente. Em seguida, empregamos a teoria não linear de operadores contínuos, apresentada na primeira seção do Capítulo 3, para analisar a dinâmica do problema. Com isso, provamos a existência de atrator global. Além disso, mostramos que esse atrator possui dimensão fractal finita e, a partir desse estudo, conseguimos obter maior regularidade para as soluções.

Por fim, no Capítulo 6, estudamos um modelo abstrato, não linear e não autônomo, de equação de onda com fronteira acústica, sob a ação de um amortecimento não linear interno e de um amortecimento do tipo derivada fracionária na fronteira. Para mostrar a existência de solução local, provamos que o operador da parte linear do problema gera um processo de evolução especial, denominado sistema CD de Kato, e que a parte não linear é localmente Lipschitz na variável espacial U e Lipschitz contínua na variável temporal em conjuntos limitados de U . A solução global foi estabelecida a partir de estimativas de energia, garantindo que as soluções não explodem em tempo finito e, assim, permanecem definidas globalmente. Finalmente, utilizamos a teoria de processos evolutivos, apresentada na segunda seção do Capítulo 3, para estudar a dinâmica pullback do problema. Com isso, provamos a existência de um atrator pullback em um universo de atração mais geral \mathcal{D} .

Capítulo 1

Distribuições e Espaços de Sobolev

Neste capítulo, exploraremos os aspectos fundamentais da teoria das Distribuições de Schwartz e dos Espaços de Sobolev, áreas essenciais na análise matemática e em aplicações a Equações Diferenciais Parciais (EDPs). O ponto de partida para essas teorias pode ser encontrado na identidade clássica:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi'(x)dx = - \int_{\mathbb{R}^n} u'(x)\varphi(x)dx,$$

onde u é uma função integrável e φ é diferenciável com suporte compacto.

Essa identidade motivou o matemático russo Sergei Sobolev a introduzir o conceito de derivada fraca, permitindo a análise de classes de funções integráveis cujas derivadas, no sentido tradicional, podem não existir, mas que possuem derivadas fracas até certa ordem. Paralelamente, Laurent Schwartz desenvolveu a teoria das distribuições, ampliando significativamente a noção de derivada proposta por Sobolev e fornecendo uma estrutura matemática robusta para tratar problemas onde as derivadas clássicas não se aplicam.

O capítulo está organizado em três seções principais, de forma a apresentar de maneira gradual e consistente os conceitos e ferramentas teóricas. Na primeira seção, construiremos uma topologia especial no espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto. Com base nessa topologia, introduziremos o conceito de distribuições, assim como os principais resultados associados a elas.

Na segunda seção, reuniremos os conceitos e propriedades mais relevantes dos espaços de Sobolev, que são fundamentais para a análise de EDPs e outras áreas da matemática aplicada. Estes espaços estendem as ideias de Sobolev sobre derivadas fracas e formam um cenário adequado para as soluções dos problemas que abordaremos nesse trabalho.

Por fim, na terceira seção, introduziremos o conceito de Distribuições Temperadas, o que nos permitirá definir os espaços de Sobolev de ordem fracionária. Esses espaços fornecem o ambiente ideal para a análise do operador traço, que generaliza a ideia de avaliar uma função no bordo de seu domínio. O operador traço desempenha um papel crucial na formulação e resolução de problemas

em EDPs, especialmente aqueles que envolvem condições de contorno.

Com essa organização, esperamos fornecer uma visão clara e estruturada das ferramentas teóricas que fundamentam a análise moderna, bem como preparar o terreno para os problemas que abordaremos nos capítulos finais desta tese.

1.1 O Espaço das Funções Testes e as Distribuições

Nesta seção, analisaremos uma topologia específica que será atribuída ao conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto. Essa topologia é essencial para definir a derivada no sentido distribucional. Nosso objetivo é investigar as principais propriedades dessa topologia, além de analisar os funcionais lineares definidos em $C_0^\infty(\Omega)$ que são contínuos em relação a essa estrutura topológica.

Inicialmente, introduziremos terminologias utilizadas na teoria das distribuições. Ao longo do texto, o símbolo Ω representará um aberto no espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Denomina-se multi-índice uma n -upla ordenada de inteiros não negativos. Para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ associa-se um operador diferencial

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Quando $|\alpha| = 0$, isto é $\alpha = (0, \dots, 0)$, D^α é operador identidade. Além disso, define-se a potência $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, com $x = (x_1, \dots, x_n)$.

1.1.1 Funções Testes

Para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, defina $\mathcal{D}_K = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n); \text{supp}(f) \subset K\}$. Quando $K \subset \Omega$, \mathcal{D}_K pode ser identificado com um subconjunto de $C^\infty(\Omega)$. Neste caso denotamos $\mathcal{D}_K := \mathcal{D}_K(\Omega)$.

Introduziremos uma topologia em $C^\infty(\Omega)$ que o transforma em um espaço de Fréchet, garantindo que $\mathcal{D}_K(\Omega)$ seja um subconjunto fechado de $C^\infty(\Omega)$ nessa topologia, sempre que $K \subset \Omega$. É possível construir uma sequência $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de conjuntos compactos, tal que $K_j \subset \text{int}(K_{j+1})$ e $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$. Sobre $C^\infty(\Omega)$, define-se uma sequência de semi-normas p_j dada por

$$p_j(f) = \max\{|D^\alpha f(x)|; x \in K_j \text{ e } |\alpha| \leq j\}, \text{ para cada } j \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

A sequência de seminormas definida acima gera uma topologia \mathcal{L}_0 em $C^\infty(\Omega)$, a qual é localmente convexa e metrizável. Além disso, para cada $x \in \Omega$, o funcional

$$\begin{aligned} \delta_x: C^\infty(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

é contínuo na topologia \mathcal{L}_0 .

Observe que, $\mathcal{D}_K(\Omega)$ pode ser descrito como a interseção dos núcleos dos funcionais δ_x , com x variando no complementar de K , ou seja

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \bigcap_{x \in \Omega / K} \ker(\delta_x).$$

Logo, $\mathcal{D}_K(\Omega)$ é um subconjunto fechado de $C^\infty(\Omega)$ na topologia \mathcal{L}_0 .

Por outro lado, podemos definir uma base local para \mathcal{L}_0 considerando a seguinte sequência de conjuntos:

$$B_j = \left\{ f \in C^\infty(\Omega); p_j(f) < \frac{1}{j} \right\}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Afirmamos que $C^\infty(\Omega)$, equipado com a topologia \mathcal{L}_0 é um espaço métrico completo. De fato, seja $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^\infty(\Omega)$. Fixando $l \in \mathbb{N}$, temos $f_j - f_l \in \beta_m$ para j e l suficientemente grandes. Assim,

$$|D^\alpha f_j - D^\alpha f_l| < \frac{1}{m}, \quad \text{para } x \in K_m \text{ e } |\alpha| < m.$$

Logo, $(D^\alpha f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente em cada compacto de Ω para uma função g_α . Em particular, $D^0 f_j = f_j \rightarrow g_0$. Assim, $g_0 \in C^\infty(\Omega)$, $g_\alpha = D^\alpha g_0$ e $f_j \rightarrow g_0$ em \mathcal{L}_0 . Portanto $(C^\infty(\Omega), \mathcal{L}_0)$ é um espaço de Fréchet, no qual cada $\mathcal{D}_K(\Omega)$, para $K \subset \Omega$ é um subconjunto fechado.

Equiparemos $C_0^\infty(\Omega)$ com uma topologia especial que o torna um espaço vetorial topológico localmente convexo. Essa topologia, embora não métrica, apresenta boas propriedades de convergência e continuidade.

Inicialmente, note que

$$\bigcup_{K \subset \Omega} \mathcal{D}_K(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega); \text{supp}(f) \text{ é um conjunto compacto de } \Omega\}.$$

Para $C_0^\infty(\Omega)$ definimos a sequência de normas

$$\|\varphi\|_j = \max\{|D^\alpha \varphi(x)|; x \in \Omega \text{ e } |\alpha| \leq j\}, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

Ao restringirmos essas normas a $\mathcal{D}_K(\Omega)$ para um compacto fixo K , a topologia induzida coincide com aquela gerada pelas seminormas p_j definidas em (1.1). De fato, dado $K \subset K_j$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$, tal que, para algum $j > j_0$, temos que $\|\varphi\|_j = p_j(\varphi)$ para $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Como

$$\|\varphi\|_j \leq \|\varphi\|_{j+1} \quad \text{e} \quad p_j(\varphi) \leq p_{j+1}(\varphi), \quad \text{sempre que } j > j_0,$$

as topologias induzidas por qualquer sequência de semi-normas mantém-se inalteradas se consideremos iniciando-se do índice i_0 . Estas duas topologias de $\mathcal{D}_K(\Omega)$ coincidem. Portanto, temos a seguinte base local

$$B'_j = \left\{ \varphi \in \mathcal{D}_K; \|\varphi\| < \frac{1}{j} \right\}.$$

Denotamos esta topologia por τ_K .

As normas definidas em (1.2) permitem construir uma topologia métrica localmente convexa sobre $C_0^\infty(\Omega)$. No entanto, esta topologia apresenta a desvantagem de não ser completa. Para superar essa limitação, definimos uma nova topologia localmente convexa em $C_0^\infty(\Omega)$, chamada *topologia do limite indutivo* e denotada por \mathcal{L} .

A topologia \mathcal{L} é definida como a coleção de todas as uniões de conjuntos da forma $\varphi + W = \{\varphi + \psi, \psi \in W\}$, com $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $W \in \beta$, onde

$$\beta = \{W \subset C_0^\infty(\Omega), W \text{ é convexo balanceado e } \mathcal{D}_K \cap W \in \tau_K \text{ para todo compacto } K \subset \Omega\}.$$

Teorema 1.1

A topologia \mathcal{L} torna $C_0^\infty(\Omega)$ um espaço vetorial topológico localmente convexo, sendo β uma base local para \mathcal{L} .

Demonstração. Ver ((RUDIN, 1991), p. 152). □

Definição 1.2

O espaço das funções testes é definido como $C_0^\infty(\Omega)$ munido da topologia do limite indutivo \mathcal{L} . Esse espaço é comumente denotado por $\mathcal{D}(\Omega) = (C_0^\infty(\Omega), \mathcal{L})$.

Teorema 1.3

No espaço $\mathcal{D}(\Omega)$ das funções testes, valem as seguintes propriedades:

- (a) Um conjunto convexo e balanceado $U \in \mathcal{D}(\Omega)$ é aberto se, e somente se, $U \in \beta$.
- (b) A topologia τ_K coincide com a topologia de subespaço que $\mathcal{D}_K(\Omega)$ induz sobre $\mathcal{D}(\Omega)$.
- (c) Se $E \subset \mathcal{D}(\Omega)$ é limitado, então $E \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$ para algum $K \subset \Omega$, e existem constantes reais $M_j < \infty$ tais que:

$$\|\varphi\|_j \leq M_j \quad \forall \varphi \in E \quad e \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

- (d) Se $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_K(\Omega)$ para algum compacto $K \subset \Omega$, e

$$\lim_{j,l \rightarrow \infty} \|\varphi_j - \varphi_l\|_m = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

- (e) Se $\varphi_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que, $\text{supp}(\varphi_j) \subset K$ e a sequência $(D^\alpha \varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para zero sobre K , qualquer que seja $j \in \mathbb{N}$ e o multiíndice α .
- (f) Toda sequência de Cauchy em $\mathcal{D}(\Omega)$ é convergente.

Demonstração. Ver ((RUDIN, 1991), p. 153). □

Teorema 1.4

Sejam Y um espaço vetorial localmente convexo e $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow Y$ uma aplicação linear. As seguintes condições são equivalentes

- (a) T é contínuo;
- (b) T é limitado;
- (c) Se $\varphi_j \rightarrow 0$ em $D(\Omega)$ então, $T(\varphi_j) \rightarrow 0$ em Y ;
- (d) Para cada compacto $K \subset \Omega$, a restrição $T|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ é contínua.

Demonstração. Ver ((RUDIN, 1991), p. 155). □

1.1.2 Distribuições**Definição 1.5**

Denomina-se *distribuição* qualquer funcional linear contínuo $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$. O conjunto de todas as distribuições é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Se T é um funcional linear, é comum representar a avaliação de T em um ponto x de seu domínio por $\langle T, x \rangle$ em vez de $T(x)$.

Teorema 1.6

Seja $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear. As seguintes condições são equivalentes

- (a) T é uma distribuição (isto é $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$);
- (b) Para cada compacto $K \subset \Omega$ existe um inteiro não negativo i e uma constante $C > 0$ tais que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_j \text{ para cada } \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

Demonstração. Ver ((RUDIN, 1991), p. 156). □

Exemplo 1.7

Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned} T_u : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

é uma distribuição.

De fato. Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então

$$\begin{aligned} \langle T_u, \varphi_1 + \lambda\varphi_2 \rangle &= \int_{\Omega} u(x)(\varphi_1 + \lambda\varphi_2)dx = \int_{\Omega} u(x)\varphi_1(x)dx + \lambda \int_{\Omega} u(x)\varphi_2(x)dx \\ &= \langle T_u, \varphi_1 \rangle + \lambda \langle T_u, \varphi_2 \rangle, \end{aligned}$$

o que prova a linearidade.

Para mostrar a continuidade, usaremos à caracterização do Teorema 1.6. Sejam $K \subset \Omega$ um compacto e $\varphi \in \mathcal{D}_K$. Então:

$$|\langle T_u, \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |u(x)| \cdot |\varphi(x)| dx = \int_K |u(x)| \cdot |\varphi(x)| dx.$$

Como o suporte de φ está contido em K , temos:

$$\int_K |u(x)| \cdot |\varphi(x)| dx \leq \max\{|\varphi(x)|; x \in \Omega\} \cdot \left(\int_K |u(x)| dx \right) = \left(\int_K |u(x)| dx \right) \cdot \|\varphi\|_0.$$

Portanto pela caracterização do Teorema 1.6 segue que T_u é uma distribuição.

Munindo o espaço vetorial $\mathcal{D}'(\Omega)$ das distribuições com a topologia fraca*, obtemos a seguinte imersão contínua $L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$. De fato, defina

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : L^1_{loc}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ u &\longmapsto T_u. \end{aligned}$$

Segue do Exemplo 1.7 que \mathcal{T} está bem definida e é linear. Além disso, \mathcal{T} é injetiva. Com efeito, sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tais que $T_u = T_v$. Então para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ temos:

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} v(x) \varphi(x) dx.$$

Logo

$$\int_{\Omega} [u(x) - v(x)] \varphi(x) dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pelo Lema de Du Bois Raymond (Teorema A.1), segue que $u = v$ em quase todo ponto de Ω . Assim, $u = v$ em $L^1_{loc}(\Omega)$.

Por esta razão, identifica-se a função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ com a distribuição T_u por ela definida, e diz-se a distribuição u ao invés de T_u . Uma vez feita essa identificação, temos $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Agora mostramos que a imersão é contínua. Sejam $(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset L^1_{loc}(\Omega)$ e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tais que $u_i \rightarrow u$ em $L^1_{loc}(\Omega)$. Para cada compacto $K \subset \Omega$ e $\varepsilon > 0$ dado, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\int_{\Omega} |u_i(x) - u(x)| dx < \varepsilon, \quad \text{sempre que } i \geq i_0.$$

Então, dada função teste $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, tem-se

$$|\langle T_{u_i} - T_u, \varphi \rangle| = \left| \int_{\Omega} [u_i(x) - u(x)] \varphi(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} |u_i(x) - u(x)| \cdot |\varphi(x)| dx$$

Como φ tem suporte contido em K , segue que:

$$\int_{\Omega} |u_i(x) - u(x)| \cdot |\varphi(x)| dx \leq \max_{x \in K} |\varphi(x)| \int_K |u_i(x) - u(x)| dx.$$

Portanto

$$|\langle T_{u_i} - T_u, \varphi \rangle| < \max_{x \in K} |\varphi(x)| \cdot \varepsilon.$$

Logo $T_{u_i} \rightarrow T_u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Existem distribuições que não são definidas por funções localmente integráveis. Para ilustrar, considere, para cada $x_0 \in \Omega$, a aplicação

$$\begin{aligned} \delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \varphi(x_0). \end{aligned}$$

Inicialmente mostramos que δ_{x_0} é uma distribuição. De fato, sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Temos:

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi_1 + \lambda \varphi_2 \rangle = (\varphi_1 + \lambda \varphi_2)(x_0) = \varphi_1(x_0) + \lambda \varphi_2(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \varphi_1 \rangle + \lambda \langle \delta_{x_0}, \varphi_2 \rangle.$$

Isso prova a linearidade.

Para mostrar a continuidade usamos o Teorema 1.6. Para cada função teste φ , temos:

$$|\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle| = |\varphi(x_0)| \leq \max_{x \in \Omega} |\varphi(x)| = \|\varphi\|_0.$$

Portanto δ_{x_0} é contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$.

A distribuição δ_{x_0} é chamada *delta de Dirac concentrada no ponto x_0* .

Mostraremos, agora, que δ_{x_0} não é definida por uma função localmente integrável, isto é, que não existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que,

$$\int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.3)$$

Suponha, por absurdo que tal u exista. Seja $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ uma função teste arbitrária, e considere a função $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ definida por $\varphi(x) = \|x - x_0\| \phi(x)$. Pela hipótese de absurdo (1.3), temos:

$$\int_{\Omega} u(x) \|x - x_0\| \phi(x) dx = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pelo Lema de du Bois Raymond (Teorema A.1), concluímos que

$$\|x - x_0\| u(x) = 0, \quad \text{em quase todo ponto } x \in \Omega.$$

Como $\|x - x_0\| > 0$ para $x \neq 0$, segue que $u(x) = 0$ em quase todo ponto $x \in \Omega$. Logo $u \equiv 0$ em $L^1_{loc}(\Omega)$.

Substituindo $u = 0$ em (1.3), obtém-se $\varphi(x_0) = 0$ para toda função teste $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, o que é um absurdo. Portanto $L^1_{loc}(\Omega) \subsetneq \mathcal{D}'(\Omega)$.

Existem também sequências de funções localmente integráveis que convergem para uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, cujo limite não pode ser representado por uma função localmente integrável.

Um exemplo clássico é dado sequência $(\phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$, onde $\phi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é definida por:

$$\phi_j(x) = \begin{cases} C j^n \exp\left(\frac{1}{\|jx\|^2 - 1}\right), & \text{se } \|x\| < \frac{1}{j} \\ 0, & \text{se } \|x\| \geq \frac{1}{j}, \end{cases}$$

com $C = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx\right)^{-1}$, sendo $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ a função definida por

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}\right), & \text{se } \|x\| < 1 \\ 0, & \text{se } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

Observe que:

$$\text{supp}(\phi_j) = \overline{B_{1/j}(0)} := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1/j\} \text{ e } \int_{\mathbb{R}^n} \phi_j(x) dx = 1 \quad (1.4)$$

A sequência (ϕ_j) converge, no sentido das distribuições, para a delta de Dirac δ_0 concentrada na origem. Isto é, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, tem-se

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle \phi_j, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

De fato, de (1.4), segue que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi_j(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi_j(x) \varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \phi_j(x) \varphi(0) dx \right| \\ &\leq \int_{\overline{B_{1/j}(0)}} \phi_j(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \end{aligned}$$

Como $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, ela é uniformemente contínua. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \varepsilon$, sempre que $\|x\| < \delta$.

Escolhendo $j_0 \geq 1/\delta$, para $j > j_0$, temos:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \phi_j(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| \leq \int_{\overline{B_{1/j}(0)}} \phi_j(x) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx \leq \varepsilon,$$

Portanto

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle \phi_j, \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle,$$

o que prova que $\varphi_j \rightarrow \delta_0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Assim, concluímos que

$$\phi_j \in L_{loc}^1(\Omega), \forall j \in \mathbb{N}, \text{ mas } \phi_j \rightarrow \delta_0 \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Mais geralmente, para $1 \leq p \leq \infty$ temos a seguinte cadeia de imersões contínuas:

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L_{loc}^p(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),$$

sendo cada inclusão densa na seguinte.

Definição 1.8

Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ uma distribuição e α um multi-índice arbitrário. A derivada $D^\alpha T$ de ordem α de T é definida como

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Inicialmente, sem nos preocuparmos em provar que a derivada distribucional de uma distribuição é de fato uma distribuição, podemos observar, que para uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e multi-índices α e β , vale a seguinte relação

$$D^\alpha D^\beta T = D^{\alpha+\beta} T = D^\beta D^\alpha T$$

O próximo resultado garante que essa definição é bem fundamentada.

Proposição 1.9

A derivada de uma distribuição é uma distribuição.

Demonstração. Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e α um multi-índice. Definimos

$$\begin{aligned} D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Primeiro, operador diferencial D^α mapeia continuamente $\mathcal{D}(\Omega)$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, e portanto $D^\alpha T$ está bem definida. A linearidade do operador $D^\alpha T$ segue diretamente da linearidade da derivada para funções infinitamente diferenciáveis e da linearidade do funcional T .

Para provar a continuidade, consideremos que, por ser $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, para cada compacto $K \subset \Omega$ existe um número inteiro não negativo j_0 e uma constante real C tal que $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{j_0}$ qualquer que seja $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Logo, para todo $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, temos:

$$|\langle D^\alpha T, \varphi \rangle| = |(-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle| = |\langle T, D^\alpha \varphi \rangle| \leq C \|D^\alpha \varphi\|_{j_0} \leq C \|\varphi\|_{j_0 + |\alpha|}.$$

Aqui utilizamos o fato de que, para todo multi-índice β :

$$\begin{aligned} \|D^\alpha \varphi\|_{j_0} &= \max_{x \in \Omega} \{|D^\beta(D^\alpha \varphi(x))|; |\beta| \leq j_0\} = \max_{x \in \Omega} \{|D^{\beta+\alpha} \varphi(x)|; |\beta| \leq j_0\} \\ &\leq \max_{x \in \Omega} \{|D^{\beta+\alpha} \varphi(x)|; |\beta + \alpha| \leq j_0 + |\alpha|\}. \end{aligned}$$

Portanto, $D^\alpha T$ é contínuo, concluindo que $D^\alpha T$ é uma distribuição. \square

A derivada de uma distribuição definida por uma função localmente integrável não é necessariamente identificada com uma função localmente integrável. Este fato será ilustrado no exemplo abaixo e motivará a introdução de uma classe relevante de espaços de Banach.

Exemplo 1.10

Considere a função de Heaviside u , definida como

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

A função u é localmente integrável, mas a sua derivada u' no sentido das distribuições não é localmente integrável. Com efeito, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, temos

$$\langle u', \varphi \rangle = -1 \langle u, \varphi' \rangle = - \int_{\mathbb{R}} u(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^\infty \varphi'(x) dx = - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \varphi'(x) dx$$

como φ tem suporte compacto, do Teorema Fundamental do Cálculo, obtém-se

$$\langle u', \varphi \rangle = - \lim_{t \rightarrow \infty} [\varphi(t) - \varphi(0)] = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle; \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Logo $u' = \delta_0$. Concluímos, assim, que u' não é definida por uma função localmente integrável.

Um observação final é oportuna. Se $u \in C^m(\mathbb{R}^n)$, para cada multi-índice $\alpha \leq |m|$, a derivada $D^\alpha u$ no sentido das distribuições coincide com a derivada de u no sentido clássico. Em termos de distribuições, isso equivale a afirmar que $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$. De fato, para qualquer multi-índice $|\alpha| \leq m$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, integrando por partes, Obtemos:

$$\begin{aligned} \langle T_{D^\alpha u}, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha u(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) D^\alpha \varphi(x) dx &= (-1)^{|\alpha|} \langle T_u, D^\alpha \varphi \rangle \\ &= \langle D^\alpha T_u, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

Isso demonstra a igualdade $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$, como afirmado.

1.2 Os Espaços de Sobolev

O matemático russo Sergei Lvovich Sobolev, definiu uma noção de derivada para funções integráveis da seguinte maneira:

Uma função $u \in L^p(\Omega)$ possui derivada fraca se, e somente se, existem funções $g_1, \dots, g_n \in L^p(\Omega)$ tais que

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} = - \int_{\Omega} g_j(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Essa noção de derivada coincide com a apresentada na Definição 1.8, quando aplicada à funções localmente integráveis.

Na seção anterior, vimos que uma função localmente integrável possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, embora essas derivadas nem sempre pertençam a $L^1_{loc}(\Omega)$. Consequentemente, funções em $L^p(\Omega)$ podem não admitir derivadas fracas, no sentido de Sobolev,

de determinadas ordens. Esse fato levou Sobolev a introduzir uma importante classe de espaços de Banach, denominadas *espaços de Sobolev*, que serão formalizadas nesta seção. Também apresentaremos o espaço dual de um subconjunto dos espaços de Sobolev, o qual impõe restrições aos seus elementos e é continuamente imerso no espaço das distribuições. Esses conceitos são fundamentais para a análise de condições de contorno em problemas modelados por Equações Diferenciais Parciais.

1.2.1 Espaços de Sobolev

Definição 1.11

Sejam m um inteiro não negativo e p um número real estendido, com $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é definido como o espaço vetorial das funções $u \in L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, para cada multi-índice $|\alpha| \leq m$. Formalmente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ e } |\alpha| \leq m\}.$$

Os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços normados. Para $1 \leq p < \infty$, a norma associada é dada por:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)} : W^{m,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Quando $p = \infty$, a norma é definida como:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} : W^{m,\infty}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

A seguir provamos que essa norma é completa.

Proposição 1.12

O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, munido da norma acima, é um espaço de Banach.

Demonstração. Consideremos o caso em que $1 \leq p < \infty$. O caso $p = \infty$ segue por argumentos similares e será omitido. Seja $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $W^{m,p}(\Omega)$. Provaremos que $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge para uma função $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

Como $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_j - u_l\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p < \varepsilon, \quad \text{sempre que } j, l > j_0.$$

Logo, para cada multi-índice $|\alpha| \leq m$, temos:

$$\|D^\alpha u_j - D^\alpha u_l\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u_j - D^\alpha u_l\|_{L^p(\Omega)}^p = \|u_j - u_l\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p < \varepsilon,$$

sempre que $j, l > j_0$.

Portanto, $(D^\alpha u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ é completo, para cada $|\alpha| \leq m$, existe uma função $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que $D^\alpha u_j \rightarrow u_\alpha$ em $L^p(\Omega)$.

Agora, seja u a função correspondente a $u_{(0, \dots, 0)}$. Mostraremos que $D^\alpha u = u_\alpha$ para cada multi-índice $|\alpha| \leq m$. Sabemos que $D^\alpha u_j \rightarrow u_\alpha$ em $L^p(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Em particular, $u_j := D^0 u_j \rightarrow u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Como o operador derivada é contínuo em $\mathcal{D}'(\Omega)$, temos que $D^\alpha u_j \rightarrow D^\alpha u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Portanto, da unicidade do limite em $\mathcal{D}'(\Omega)$, segue que $D^\alpha u = u_\alpha$.

Finalmente, provamos que $u_j \rightarrow u$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $|\alpha| \leq m$, existe $j_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|D^\alpha u_j - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p < \frac{\varepsilon}{\sum_{|\alpha| \leq m} 1}, \text{ sempre que } j > j_\alpha.$$

Assim, para $j > \max\{j_\alpha; |\alpha| \leq m\}$, temos:

$$\|u_j - u\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u_j - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p < \varepsilon.$$

Logo, $u_j \rightarrow u$ em $W^{m,p}(\Omega)$, e portanto $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

□

No caso particular em que $m = 0$, o espaço $W^{0,p}(\Omega)$ coincide com $L^p(\Omega)$. Já quando $p = 2$, o espaço de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ é comumente denotado por $H^m(\Omega)$. Este espaço, quando munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in H^m(\Omega).$$

possui uma estrutura de espaço de Hilbert.

Um aspecto relevante da estrutura topológica de $W^{m,p}$ é sua compatibilidade com as funções teste, o que se traduz na validade da imersão contínua $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)$. Isso equivale a dizer que o operador inclusão

$$\begin{aligned} T : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow W^{m,p}(\Omega) \\ \varphi &\longmapsto \varphi. \end{aligned}$$

é contínuo.

Para verificar esta propriedade, considere uma sequência $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Nesse contexto, existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $\text{supp}(\varphi_j) \subset K$ e para qualquer multi-índice α , temos $D^\alpha \varphi_j \rightarrow 0$ uniformemente em K . Isso implica que, dado $\varepsilon > 0$, existe um $j_\alpha \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in K$, temos

$$|D^\alpha \varphi_j(x)| < \varepsilon, \text{ sempre que } j > j_\alpha.$$

Com isso, para $1 \leq p < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\|\varphi_j\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi_j\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_K |D^\alpha \varphi_j(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \left(\sum_{|\alpha| \leq m} (\varepsilon \cdot \text{med}(K))^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

sempre que $j > \max\{j_\alpha; \alpha \leq m\}$

Portanto $T(\varphi_j) = \varphi_j \rightarrow 0$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Assim, do Teorema 1.4, segue que a imersão $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega)$ é de fato contínua.

Quando $p = \infty$, o resultado segue de maneira análoga.

No curso de Teoria da Medida, sabe-se que, para $1 \leq p < \infty$, o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ munido de sua topologia natural dada pela norma da convergência uniforme, é denso em $L^p(\Omega)$. Por outro lado o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^\infty(\Omega)$ com respeito a topologia fraca $\sigma(L^\infty, L^1)$. Assim, a partir do que foi discutido anteriormente, concluímos que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$. Como $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$, temos $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. Contudo, o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ não denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Este último fato motiva a definição apresentada a seguir.

Definição 1.13

Seja m um inteiro não negativo e sejam p e q números reais estendidos tais que $1 \leq p \leq \infty$, $q > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Define-se

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)},$$

onde o fecho é tomado na norma de $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Quando $p = 2$, utiliza-se a notação $H_0^m(\Omega) := W_0^{m,2}(\Omega)$.

Além disso, define-se $W^{-m,q}(\Omega)$ como o dual topológico forte $[W_0^{m,p}]'$ de $W_0^{m,p}(\Omega)$. De maneira análoga, o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ é representado por $H^{-m}(\Omega)$.

Proposição 1.14

Seja $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções testes tal que $\varphi_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Então $\varphi_j \rightarrow 0$ em $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Demonstração. Como $\varphi_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $\text{supp}(\varphi_j) \subset K$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Além disso, $D^\alpha \varphi_j \rightarrow 0$ uniformemente em K quaisquer que seja o multi-índice α . Assim,

$$\|\varphi_j\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \varphi_j\|_{L^p(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha \varphi_j(x)|^p dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_K |D^\alpha \varphi_j(x)|^p dx$$

Utilizando a uniformidade no compacto K , temos:

$$\|\varphi_j\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_K |D^\alpha \varphi_j(x)|^p dx \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi_j(x)|^p \cdot \text{med}(K).$$

Como para cada $j \in \mathbb{N}$ e cada multi-índice α , $D^\alpha \varphi_j \rightarrow 0$ uniformemente em K , segue que

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi_j(x)|^p \rightarrow 0.$$

Logo $\|\varphi_j\|_{W^{m,p}(\Omega)}^p \rightarrow 0$. Isto é, $\varphi_j \rightarrow 0$ em $W^{m,p}(\Omega)$. □

Corolário 1.15

Se $T \in W^{-m,q}(\Omega)$, então $T|_{\mathcal{D}(\Omega)} : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ é uma distribuição.

Demonstração. Seja $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$. Da Proposição 1.14, segue que $\varphi_j \rightarrow 0$ em $W_0^{m,p}(\Omega)$. Assim, $\langle T, \varphi_j \rangle \rightarrow 0$. Portanto, pelo Teorema 1.4, conclui-se que $T|_{\mathcal{D}(\Omega)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$. \square

Proposição 1.16

A aplicação linear

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : W^{-m,q}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\longmapsto T|_{\mathcal{D}(\Omega)} \end{aligned}$$

é injetora e contínua.

Demonstração. Sejam $T_1, T_2 \in W^{-m,q}(\Omega)$ tal que $\mathcal{T}(T_1) = \mathcal{T}(T_2)$, isto é, $(T_1)|_{\mathcal{D}(\Omega)} = (T_2)|_{\mathcal{D}(\Omega)}$. Como $W_0^{m,p}(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$, dado $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, existe uma sequência $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_j \rightarrow u$ em $W^{m,p}(\Omega)$, e, pelo fato de $\langle T_1, \varphi_j \rangle = \langle T_2, \varphi_j \rangle$, tem-se

$$\langle T_1, u \rangle = \lim \langle T_1, \varphi_j \rangle = \lim \langle T_2, \varphi_j \rangle = \langle T_2, u \rangle.$$

Logo, $T_1 = T_2$, o que prova a injetividade da \mathcal{T} .

Resta mostrar a continuidade. Considere uma sequência $(T_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset W^{-m,q}(\Omega)$ uma sequência tal que $T_j \rightarrow 0$ em $W^{-m,q}(\Omega)$. Assim, para cada $j \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\|T_j\|_{W^{-m,q}(\Omega)} = \sup_{u \in W_0^{m,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\langle T_j, u \rangle|}{\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}} \rightarrow 0.$$

Portanto, $\langle T_j, u \rangle \rightarrow 0$ para todo $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$. Em particular, $\langle T_j, \varphi \rangle \rightarrow 0$ para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, o que garante que $T_j \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Assim, \mathcal{T} é contínua. \square

Devido a Proposição 1.16, temos a seguinte inclusão contínua:

$$W^{-m,q}(\Omega)|_{\mathcal{D}(\Omega)} \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),$$

onde $W^{-m,q}(\Omega)|_{\mathcal{D}(\Omega)} := \{T|_{\mathcal{D}(\Omega)}; T \in W^{-m,q}(\Omega)\}$.

Sempre que mencionarmos uma distribuição $T \in W^{-m,q}(\Omega)$, consideraremos implicitamente sua restrição $T|_{\mathcal{D}(\Omega)}$.

Apresentamos agora uma série de resultados fundamentais para a obtenção das estimativas necessárias à abordagem dos problemas que serão tratados nos capítulos finais deste trabalho. Esses resultados fornecem maneiras de definir normas em $W_0^{m,p}(\Omega)$ que são equivalentes à norma usual de $W^{m,p}(\Omega)$ quando restrita ao subespaço $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.17 (Desigualdade de Poincaré)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado em alguma direção x_i e seja $pr_i(\Omega) \subset (a, b)$ a sua projeção nessa direção. Então para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, tem-se

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq (b-a)^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx$$

Demonstração. Ver ((**MEDEIROS; MIRANDA, 2000**), p. 36). \square

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado, a Desigualdade de Poincaré pode ser aplicada em todas as direções x_1, \dots, x_n . Assim, obtemos:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2},$$

para alguma constante $C > 0$ que depende da limitação de Ω em cada direção do espaço \mathbb{R}^n . Essa desigualdade define uma norma para espaço $H_0^1(\Omega)$, equivalente à norma usual de $H^1(\Omega)$ restrita a $H_0^1(\Omega)$.

Corolário 1.18

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e $m \in \mathbb{N}$. A função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{H_0^m(\Omega)} : H_0^m(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \|u\|_{H_0^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

define uma norma no espaço $H_0^m(\Omega)$, equivalente a norma usual de $H^m(\Omega)$ restrita aos elementos de $H_0^m(\Omega)$.

Demonstração. Ver ((**MEDEIROS; MIRANDA, 2000**), p. 37). \square

Mais geralmente:

Proposição 1.19

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, $1 \leq p < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. A função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{W_0^{m,p}(\Omega)} : W_0^{m,p}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \|u\|_{W_0^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^{\alpha} u\|_{L^p(\Omega)}^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

define uma norma no espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$, equivalente a norma usual do espaço $W^{m,p}(\Omega)$ restrita a $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Demonstração. Ver ((**MEDEIROS; MIRANDA, 2000**), p. 36-38). \square

Proposição 1.20

Seja $u \in H_0^2(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado. Então existe $C_0 > 0$ que depende da limitação Ω tal que:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0 \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração. Note que:

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right)^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right)^2 dx + 2 \sum_{i < j} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} dx. \quad (1.5)$$

Como $u \in H_0^1(\Omega)$, da Fórmula de Green, segue que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j^2} dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} \right)^2 dx. \quad (1.6)$$

Assim, de (1.5) e (1.6), segue que:

$$\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} \right)^2. \quad (1.7)$$

Como $H_0^2(\Omega)$, temos que $u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H_0^1(\Omega)$. Então da desigualdade de Poincaré, existem constantes $C, \tilde{C} > 0$ tais que:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{e} \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \tilde{C}^2 \left\| \nabla \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (1.8)$$

Portanto, das desigualdades (1.7) e (1.8), segue que:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_0^2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} \right)^2 = C_0^2 \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

onde $C_0 = C\tilde{C}$. □

Corolário 1.21

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado. A função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{H_0^2(\Omega)} : H_0^2(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

define uma norma no espaço $H_0^2(\Omega)$, equivalente a norma usual de $H^2(\Omega)$ restrita aos elementos de $H_0^2(\Omega)$.

Teorema 1.22 (Desigualdade de Poicaré-Wirtinger)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado regular de classe C^1 . Então existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\left\| u - \frac{1}{\text{med}(\Omega)} \int_{\Omega} u(x) dx \right\|_{L^p(\Omega)} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx \right)^{1/p}.$$

No caso $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$, tem-se $C = 2(b-a)$

Demonstração. ver ((**ATTOUCH; BUTTAZZO; MICHAILLE, 2006**); p. 173). □

1.2.2 Imersões de Sobolev

A fim de introduzir as imersões do tipo Sobolev em um aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definiremos, no restante desta seção, uma condição de compatibilidade para o aberto Ω . Essa condição permitirá construir um operador de prolongamento, que tem como objetivo transferir as imersões contínuas existentes nos espaços $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ (ver ((CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009), p. 146, 152, 166)) para os espaços $W^{m,p}(\Omega)$.

Definição 1.23

Diremos que um conjunto aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é *regular* (de classe C^k), se sua fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ for uma variedade de classe C^k de dimensão $n-1$, estando Ω inteiramente de um lado de Γ . Isto significa que, para cada ponto $x_0 \in \Gamma$ existe um número real $r > 0$ e uma função $\varphi_{x_0} : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}$, de classe C^k , tais que:

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \{(x_1, \dots, x_n) \in B_r(x_0); x_n > \varphi_{x_0}(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado regular e Q o retângulo aberto:

$$Q = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n; 0 < y_j < 1 \text{ para } j = 1, \dots, n-1, \text{ e } -1 < y_n < 1\}.$$

Definimos os subconjuntos abertos Q^+ e Q^- , e a hipersuperfície Σ , como

$$Q^+ = Q \cap \{y_n > 0\}, \quad Q^- = Q \cap \{y_n < 0\}, \quad \Sigma = Q \cap \{y_n = 0\}$$

Se considerarmos um ponto $x \in \Gamma$, então existem uma vizinhança limitada $U_x \subset \mathbb{R}^n$ de x e uma aplicação $\varphi_x : U_x \rightarrow Q$ tais que:

- (a) φ_x é uma bijeção de U_x sobre Q .
- (b) φ_x e φ_x^{-1} possuem derivadas parciais contínuas até a ordem k .
- (c) $\varphi_x(U_x \cap \Omega) = Q^+$, $\varphi_x(U_x \cap \mathbb{R}^n / \bar{\Omega}) = Q^-$, $\varphi_x(U_x \cap \Gamma) = \Sigma$.

As condições (a) e (b) garantem que $\varphi_x : U_x \rightarrow Q$ é um difeomorfismo de classe C^k . Além disso, exigimos a seguinte condição de compatibilidade:

- (d) Se (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2) são pares que satisfazem as condições (a), (b) e (c), com $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, então existe um homeomorfismo diferenciável J_{12} de $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ sobre $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$, com jacobiano positivo, tal que:

$$\varphi_2(x) = J_{12}(\varphi_1(x)), \quad \forall x \in U_1 \cap U_2.$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto limitado regular. A fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ é um compacto de \mathbb{R}^n . Consequentemente, existe um sistema finito de cartas locais $\{(U_j, \varphi_j)\}_{1 \leq j \leq m}$ para Γ . Com essas

cartas locais, é possível construir uma partição da unidade C^k subordinada à cobertura $\{U_j\}_{0 \leq j \leq m}$, onde $U_0 = \Omega$. Essa cobertura é tal que:

$$\left(\bigcup_{j=0}^m U_j \right) = \left[\Omega \cup \left(\bigcup_{j=1}^m U_j \right) \right] \supset \overline{\Omega}.$$

Denotamos as funções dessa partição por $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m$. Assim, essas funções satisfazem as seguintes propriedades:

$$\theta_j \in C_0^k, \quad \forall j = 0, 1, \dots, m.$$

$$\text{supp}(\theta_0) \subset \Omega, \quad \text{supp}(\theta_j) \subset U_j, \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

$$0 \leq \theta_j \leq 1, \quad \forall j = 0, \dots, m.$$

$$\sum_{j=0}^m \theta_j(x) = 1, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

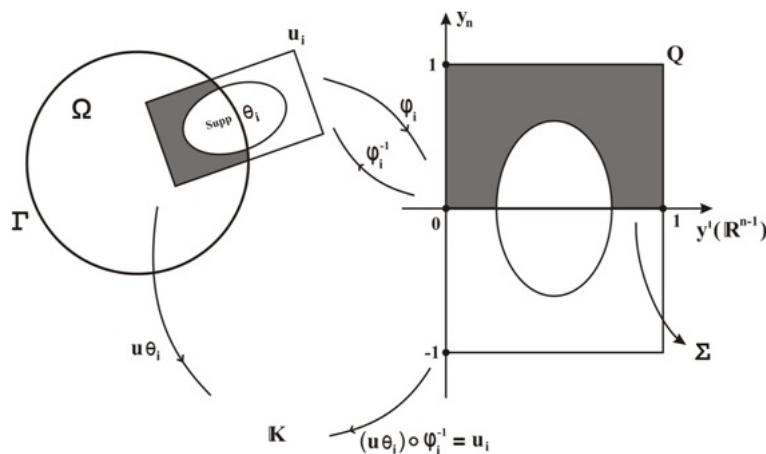


Figura 1 – Aberto regular

Referência: (CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009)

Teorema 1.24

Seja Ω um aberto limitado regular. Existe um operador linear e contínuo

$$P : W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n),$$

Chamado *operador de prolongamento*, tal que, para todo $u \in W^{m,p}(\Omega)$ temos $P(u) = u$, em quase todo ponto de Ω .

O Teorema anterior permite herdar certos resultados de imersões já conhecidos para os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, como veremos a seguir.

Teorema 1.25

Seja Ω um aberto limitado regular do espaço \mathbb{R}^n . Para $n \geq 2$ temos:

- (a) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, quando $mp < n$ e $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$.

(b) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, quando $mp = n$ e $p \leq q < \infty$.

(c) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{K,\lambda}(\overline{\Omega})$, quando $mp > n$, com $k \in \mathbb{N}$ tal que $k < m - \frac{n}{p} \leq k + 1$, e:

- $0 < \lambda m - k - \frac{n}{p}$, se $m - k - \frac{n}{p} < 1$,
- $0 < \lambda < 1$, caso $m - k - \frac{n}{p} = 1$.

Demonstração. ver ((CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009), p. 208). \square

Corolário 1.26

Se $1 \leq p < \infty$, $mp < n$ e $p \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Demonstração. ver ((MEDEIROS; MIRANDA, 2000), p. 46). \square

Teorema 1.27

Seja I um intervalo aberto limitado de \mathbb{R} . Então:

(a) $W^{m,p}(I) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\overline{I})$, com $0 < \lambda \leq 1 - \frac{1}{p}$ e $1 < p < \infty$.

(b) $W^{m,1}(I) \hookrightarrow C^{m-1,1}(\overline{I})$.

Demonstração. ver ((CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009), p. 209). \square

Os resultados de imersão apresentados anteriormente, aliados à estrutura de aberto limitado regular, permitem obter os seguintes resultados de compacidade:

Teorema 1.28 (Rellich-Kondrachov)

Sejam Ω um aberto limitado regular do espaço \mathbb{R}^n . Para $n \geq 2$ e $1 \leq p \leq \infty$, temos:

(a) $W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{\text{comp}} L^q(\Omega)$, sempre que $p < n$ e $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$.

(b) $W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{\text{comp}} L^q(\Omega)$, sempre que $p = n$ e $1 \leq q < \infty$.

(c) $W^{1,p}(\Omega) \xrightarrow{\text{comp}} C^0(\overline{\Omega})$, sempre que $p > n$.

Demonstração. ver ((MEDEIROS; MIRANDA, 2000), p. 79). \square

Corolário 1.29

Sejam Ω um aberto limitado regular de classe C^m do espaço \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então

(a) $W^{m+1,p}(\Omega) \xrightarrow{\text{comp}} W^{m,q}(\Omega)$, sempre que $p < n$ e $1 \leq q < \frac{np}{n-p}$.

(b) $W^{m+1,p}(\Omega) \xrightarrow{\text{comp}} W^{m,q}(\Omega)$, sempre que $p = n$ e $1 \leq q < \infty$.

(c) $W^{m+1,p}(\Omega) \xrightarrow{\text{comp}} C^m(\overline{\Omega})$, sempre que $p > n$.

Demonstração. ver ((**MEDEIROS; MIRANDA, 2000**), p. 84) □

Teorema 1.30

Seja I um intervalo aberto limitado de \mathbb{R} . Então:

(a) $W^{1,p}(I) \xrightarrow{\text{comp}} C^0(\bar{I})$, onde $1 < p \leq \infty$.

(b) $W^{1,1}(I) \xrightarrow{\text{comp}} L^q(I)$, onde $1 < q \leq \infty$.

Demonstração. Ver ((**CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009**), p. 221). □

1.2.3 Distribuições Veoriais e Espaços de Sobolev Vetoriais

Nesta subseção, definiremos a importante noção de distribuição vetorial. Estudaremos uma relevante classe de funções vetoriais, a saber, o espaço $L^p(\tau, T; X)$. O mesmo é ambiente natural das funções utilizadas no problemas de evolução, onde consideraremos funções u , com duas variáveis (tempo, t e posição, x) tais que, a função $t \rightarrow \|u(t)\|$ (onde, $[u(t)](x) = u(x, t)$) seja integrável. Além disso, veremos que as funções em $L^p(\tau, T; X)$, definem distribuições vetoriais e enunciaremos resultados sobre esses espaços, que serão usados nos problemas apresentados nesta tese.

Existe uma noção de integral para funções definidas em Y e tomando valores em X . Esta integral é chamada integral de Bochner. Para uma exposição completa deste assunto ver ((**YOSIDA, 1965**), capítulo 5). Nos limitaremos a estudar o caso em que $Y = [\tau, T]$. Isto é, funções do tipo $f : [\tau, T] \rightarrow X$, onde $\tau < T$ são números reais e X é um espaço de Banach.

Teorema 1.31 (Teorema de Bochner)

Uma função fortemente mensurável $f : [\tau, T] \rightarrow X$ é integrável se, e somente se, a aplicação $t \mapsto \|f(t)\|$ é somável. Neste caso,

$$\left\| \int_{\tau}^T f(t) dt \right\| \leq \int_{\tau}^T \|f(t)\| dt.$$

Além disso, para cada $\Psi \in X'$, tem-se

$$\left\langle \Psi, \int_{\tau}^T f(t) dt \right\rangle = \int_{\tau}^T \langle \Psi, f(t) \rangle dt.$$

Demonstração. Ver ((**EVANS, 2010**), p. 650). □

Definição 1.32

Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Denota-se por $L^p(\tau, T; X)$ o espaço vetorial das (classes de) funções $f : (\tau, T) \rightarrow X$ fortemente mensuráveis, tais que a função, $t \mapsto \|f(t)\| \in L^p((\tau, T))$.

Munimos o espaço vetorial $L^p(\tau, T; X)$ com a norma definida por

$$\|f\|_{L^p(\tau, T; X)} = \left(\int_{\tau}^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in L^p(\tau, T; X) \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty(\tau, T; X)} = \text{ess} \sup_{\tau \leq t \leq T} \|f(t)\|_X, \quad f \in L^\infty(\tau, T; X).$$

O espaço vetorial $L^p(\tau, T; X)$ é um espaço de Banach. Em particular, o espaço $L^2(\tau, T; X)$ é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno definido por:

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\tau, T; X)} = \int_\tau^T \langle f(t), g(t) \rangle_X dt, \quad \forall f, g \in L^2(\tau, T; X).$$

Definição 1.33

Seja $f \in L^1(\tau, T; X)$. Dizemos que uma função $g \in L^1(\tau, T; X)$ é a derivada fraca de f , e escrevemos $g = f'$ quando

$$\int_\tau^T \varphi'(t) f(t) dt = - \int_\tau^T \varphi(t) g(t) dt,$$

para todo função teste $\varphi \in \mathcal{D}((0, T))$.

Definição 1.34

Sejam X um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev vetorial $W^{1,p}(\tau, T; X)$ da seguinte forma:

$$W^{1,p}(\tau, T; X) = \{f \in L^p(\tau, T; X); f' \text{ existe e } f' \in L^p(\tau, T; X)\},$$

munido da norma definida por

$$\|f\|_{W^{1,p}(\tau, T; X)} = \left(\int_\tau^T \|f(t)\|_X^p + \|f'(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in W^{1,p}(\tau, T; X) \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{W^{1,\infty}(\tau, T; X)} = \text{ess} \sup_{\tau \leq t \leq T} (\|f(t)\|_X + \|f'(t)\|_X), \quad f \in W^{1,\infty}(\tau, T; X).$$

Os espaços $W^{m,p}(0, T; X)$ são Banach. Em particular, o espaço $H^1(0, T; X) := W^{1,2}(0, T; X)$ é um espaço de Hilbert.

A seguir apresentaremos um resultado de compacidade, de suma importância no estudo de Equações Diferenciais Parciais não lineares.

Teorema 1.35 (Teorema de Aubin-Lions)

Sejam X, Y e Z espaços de Banach tais que:

(a) Y e Z são reflexivos.

(b) $Y \xrightarrow{\text{comp}} X$ e $X \hookrightarrow Z$.

Sejam p_0 e p_1 números reais tais que $1 < p_0 \leq \infty$ e $1 \leq p_1 < \infty$. Então

$$W = W^{p_0, p_1}(0, T; Y; Z) := \{f \in L^{p_0}(\tau, T; Y); f' \in L^{p_1}(\tau, T; Z)\}$$

munido da norma definida por

$$\|f\|_W = \|f\|_{L^{p_0}(\tau, T; Y)} + \|f'\|_{L^{p_1}(\tau, T; Z)} \quad \forall f \in W$$

é um espaço de Banach e $W \xrightarrow{\text{comp}} L^{p_0}(\tau, T; X)$.

Demonstração. Ver (LIONS; ROBERT; DAUTRAY, 2000)). □

Definição 1.36

Sejam X uma espaço de Banach. Definimos o espaço das distribuições vetoriais sobre (τ, T) com valores em X por

$$\mathcal{D}'(\tau, T; X) = \{T : \mathcal{D}((\tau, T)) \rightarrow X; T \text{ é linear e contínua}\}$$

Fixe $f \in L^p(\tau, T; X)$ e defina,

$$\begin{aligned} \Psi_f : \mathcal{D}((\tau, T)) &\longrightarrow X \\ \varphi &\longmapsto \int_{\tau}^T f(t)\varphi(t) dt. \end{aligned}$$

A aplicação $f \mapsto \Psi_f$ é linear, contínua e injetiva. Assim, temos a seguinte imersão: $L^p(\tau, T; X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\tau, T; X)$.

Definição 1.37

Seja $\Psi \in \mathcal{D}'(\tau, T; X)$ uma distribuição. A derivada $\frac{d^n \Psi}{dt^n}$ de ordem n de Ψ é definida pela seguinte expressão

$$\left\langle \frac{d^n \Psi}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle \Psi, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}((\tau, T)).$$

Proposição 1.38

Seja H um espaço de Hilbert. Se uma função $f \in L^2(\tau, T; H)$ e sua derivada fraca $f' \in L^2(\tau, T; H')$, então existe uma função $g : (\tau, T) \rightarrow H$ contínua tal que $f(t) = g(t)$, q.t.p em (τ, T) . Além disso, no sentido das distribuições em (τ, T) , obtemos

$$\frac{d}{dt} |f(t)|_H^2 = 2 \langle f'(t), f(t) \rangle_H \text{ em } \mathcal{D}'(\tau, T; H).$$

A igualdade acima está bem definida, desde que as funções

$$t \mapsto \|f(t)\|_H \quad \text{e} \quad t \mapsto \langle f'(t), f(t) \rangle$$

sejam ambas integráveis em (τ, T) .

Demonstração. Ver (Temam (TEMAM, 1974), página 261). □

1.3 Distribuições Temperadas e Espaços de Sobolev Fracionário

Nesta seção, apresentaremos o espaço de Schwartz, as noções de distribuição temperada e a transformada de Fourier, conceitos fundamentais para a definição de uma nova classe de espaços de Hilbert: os espaços $H^s(\Omega)$, onde $s \geq 0$ é um número real. Além disso, com o objetivo de analisar o comportamento de funções submetidas a condições de contorno, definiremos formalmente os espaços ambientes para funções definidas na fronteira $\partial\Omega$ de uma aberto regular Ω .

1.3.1 Distribuições Temperadas

Definição 1.39

O espaço de Schwartz, também conhecido como *espaço das funções rapidamente decrescentes* e denotado por $S(\mathbb{R}^n)$, é o subespaço vetorial formado pelas funções $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^j D^\alpha \varphi(x) = 0,$$

para todo inteiro não negativo j e todo multi-índice α .

O conjunto das funções infinitamente diferenciáveis de suporte compacto, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, é um subconjunto do espaço de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\text{supp}(\varphi) \subset K$. Considere uma constante $r > 0$ tal qual $K \subset B_r(0)$. Assim, para qualquer $\varepsilon > 0$, inteiro não negativo j e multi-índice α dados, temos:

$$\|x\|^j |D^\alpha \varphi(x)| = 0 < \varepsilon, \text{ sempre que } \|x\| > r.$$

Portanto,

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^j D^\alpha \varphi(x) = 0.$$

Isto é, $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Prova-se que o produto de funções em $S(\mathbb{R}^n)$ pertence a $S(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $D^\alpha \varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ quaisquer que sejam a função $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ e o multi-índice α . Para estabelecer uma estrutura topológica em $S(\mathbb{R}^n)$ que o torna um espaço de Fréchet, introduzimos a família de semi-normas

$$p_{m,j}(\varphi) = \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^j |D^\alpha \varphi(x)|,$$

onde j e m são inteiros não negativos.

Essa família enumerável de semi-normas, confere ao espaço uma topologia metrizável, localmente convexa e completa, tornando-o um espaço de Fréchet (ver ((RUDIN, 1991), p. 184)).

Sempre que mencionarmos o espaço de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$, consideraremos implicitamente essa topologia, conforme descrito.

Proposição 1.40

Se $1 \leq p \leq \infty$, então a imersão $S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ é contínua. Além disso, para $1 \leq p < \infty$, o espaço $S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente, o espaço das funções testes $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, é denso em $S(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver ((CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009), p. 55 e p. 56). □

Definição 1.41

Uma *distribuição temperada* é um funcional linear e contínuo $T : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ definido sobre o espaço de Schwartz. O conjunto de todas as distribuições temperadas, munido da topologia fraca*, é denotado por $S'(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 1.42

Qualquer função $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ onde, $1 \leq p \leq \infty$, define uma distribuição temperada. De fato, considere

$$\begin{aligned} T_u : S(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)dx. \end{aligned}$$

A linearidade de T_u é imediata pela definição da integral. A continuidade é analisada em três casos.

Caso $1 < p < \infty$, seja q um número real tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, para cada $j > \frac{n}{2q}$, temos

$$(1 + \|x\|^2)^{-j} \in L^q(\mathbb{R}^n).$$

Usando a desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \varphi \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^j |\varphi(x)| \cdot |u(x)| \cdot (1 + \|x\|^2)^{-j} dx \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + \|x\|^2)^j \cdot \varphi(x)| \cdot \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \cdot \|(1 + \|x\|^2)^{-j}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Se caso $p = 1$, temos

$$|\langle T_u, \varphi \rangle| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

Finalmente, no caso em que $p = \infty$, para $j > \frac{n}{2}$ temos,

$$|\langle T_u, \varphi \rangle| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + \|x\|^2)^j \cdot \varphi(x)| \cdot \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot \|(1 + \|x\|^2)^{-j}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Assim, em qualquer caso, dada uma sequência $(\varphi_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset S(\mathbb{R}^n)$, com $\varphi_l \rightarrow 0$ em $S(\mathbb{R}^n)$, tem-se $\langle T_u, \varphi_l \rangle \rightarrow 0$. Portanto T_u é contínua.

Além disso, a aplicação

$$\begin{aligned} T : L^p(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow S'(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto T_u \end{aligned}$$

é linear, contínua e injetora.

Da Proposição 1.40 e do exposto acima, temos

$$S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n), \quad \text{para } 1 \leq p \leq \infty.$$

Apresentaremos agora a transformada de Fourier de uma função pertencente ao espaço $L^1(\mathbb{R}^n)$ e sua extensão para o espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$. Essa generalização permitirá definir a transformada de Fourier para distribuições temperadas e, por meio de caracterizações apropriadas, estender a norma do espaço $H^m(\mathbb{R}^n)$ para valores de m não inteiros, atribuindo sentido a esses espaços com expoentes fracionários.

Definição 1.43

Seja $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de u é definida pela função

$$\begin{aligned}\widehat{u} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, y \rangle} u(x) dx,\end{aligned}$$

onde $i^2 = -1$ e $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ é o produto interno usual em \mathbb{R}^n .

A transformada de Fourier está bem definida para qualquer $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pois

$$|\widehat{u}(y)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x, y \rangle} u(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i \langle x, y \rangle}| \cdot |u(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| dx = \|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Portanto, a transformada de Fourier é uma ferramenta bem fundamentada em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

A seguir, apresentaremos propriedades fundamentais da Transformada de Fourier, as quais permitem sua extensão aos espaços $L^2(\mathbb{R}^n)$ e às distribuições temperadas

Proposição 1.44

Se $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{\varphi} \in S(\mathbb{R}^n)$. Além disso, o operador

$$\begin{aligned}\Psi : S(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow S(\mathbb{R}^n) \\ \varphi &\longmapsto \widehat{\varphi}\end{aligned}$$

é um isomorfismo topológico, cuja a inversa é o operador

$$\begin{aligned}\Psi^{-1} : S(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow S(\mathbb{R}^n) \\ \varphi &\longmapsto \check{\varphi}\end{aligned}$$

dado pela transformação de Fourier inversa que é definida por:

$$\check{\varphi}(y) = \widehat{\varphi}(-y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle x, y \rangle} \varphi(x) dx.$$

Demonstração. Ver ((CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009), p. 64). □

Teorema 1.45 (Plancherel)

Existe uma única bijeção isométrica

$$\mathcal{P} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

tal que $\mathcal{P}(\varphi) = \widehat{\varphi}$, para todo $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver ((CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009), p. 68). □

Observe que, dado $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, temos $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Além disso, de Plancherel (Teorema 1.45), decorre que $\|\hat{u}\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)}$. Por outro lado, se $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, existe uma sequência de funções testes $(u_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|u - u_l\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$. Logo, $(u_l)_{l \in \mathbb{N}}$ é Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$, e portanto $(\hat{u}_l)_{l \in \mathbb{N}}$ é Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim, podemos definir a transformada de Fourier de uma função $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, pondo $\hat{u} := \lim \hat{u}_l$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.46

Seja $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ uma distribuição temperada. A *transformada de Fourier* \hat{T} da distribuição T é definida por:

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Da Proposição 1.44, segue que a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi^* : S'(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow S'(\mathbb{R}^n) \\ T &\longmapsto \hat{T} \end{aligned}$$

é um isomorfismo topológico cuja a inversa é operador

$$\begin{aligned} (\Psi^*)^{-1} : S'(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow S'(\mathbb{R}^n) \\ T &\longmapsto \check{T}, \end{aligned}$$

onde $\check{T} : S \rightarrow \mathbb{R}$ é a *transformada de Fourier inversa da distribuição* T definida por

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle; \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Um último comentário sobre transformadas de Fourier é oportuno. Como $S(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n)$, há duas possíveis definições de transformada de Fourier em $S(\mathbb{R}^n)$: uma proveniente de $L^2(\mathbb{R}^n)$ e outra de $S'(\mathbb{R}^n)$. Na verdade, essas duas noções coincidem. Mais precisamente, tem-se $\widehat{T_\varphi} = T_{\check{\varphi}}$. A demonstração detalhada pode ser encontrada em ((CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009), p. 73-75).

1.3.2 Espaços de Sobolev Fracionários

A seguir, definiremos uma classe importante de espaços de Hilbert, os espaços de Sobolev fracionários $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.47

Para cada $m \in \mathbb{N}$ temos:

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n); (1 + \|x\|^2)^m \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Além disso, a função $\langle \cdot, \cdot \rangle_m : H^m(\mathbb{R}^n) \times H^m(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\langle u, v \rangle_m = \left\langle (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u}, (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{v} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^m \hat{u}(x) \hat{v}(x) dx, \quad \forall u, v \in H^m(\mathbb{R}^n)$$

é um produto interno sobre $H^m(\mathbb{R}^n)$ tal que a norma por ele induzida é equivalente a norma $\|\cdot\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}$ usual do espaço $H^m(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Ver ((CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009), p. 242). \square

Motivados pelo resultado anterior, definimos os espaços a seguir.

Definição 1.48

Para $s \in \mathbb{R}$, com $s \geq 0$ define-se

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n); (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Proposição 1.49

O espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ munido do produto interno definido por,

$$\langle u, v \rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^s \hat{u}(x) \hat{v}(x) dx, \quad \forall u, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$$

é um espaço de Hilbert.

Além disso, tem-se $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$

Demonstração. Ver ((CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009), p. 245). \square

Proposição 1.50

Sejam $s \geq 0$ e α um multi-índice tal que $|\alpha| \leq s$. A aplicação

$$\begin{aligned} D^\alpha : H^s(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto D^\alpha u \end{aligned}$$

é linear e contínua.

Demonstração. Ver ((CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009), p. 252). \square

Definição 1.51

Seja $s \geq 0$ um número real. O dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^n)$ é denotado por:

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n) = [H^s(\mathbb{R}^n)]'.$$

A seguir, apresentamos os resultados necessários para definir os espaços de Hilbert $H^s(\Omega)$, onde Ω é um aberto regular e s um número real não-negativo.

Teorema 1.52

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado regular com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$. Considere a aplicação:

$$\begin{aligned} r_\Omega : L^2(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ u &\longmapsto u|_\Omega. \end{aligned}$$

A aplicação r_Ω é linear e contínua.

Além disso, para cada $m \in \mathbb{N}$

$$H^m(\Omega) = \{r_\Omega(u); u \in H^m(\mathbb{R}^n)\},$$

e para cada multi-índice α , tem-se $D^\alpha(r_\Omega(u)) = r_\Omega(D^\alpha u)$ no sentido das distribuições.

Demonstração. Ver ((CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009), p. 265). \square

Motivados pelo teorema anterior, definimos o seguinte.

Definição 1.53

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto regular e $s \geq 0$. Define-se

$$H^s(\Omega) = \{v|_\Omega; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}.$$

Observe que, se $u \in H^s(\Omega)$ então $u = v|_\Omega$ para algum, $v \in H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, o que implica $u = v|_\Omega \in L^2(\Omega)$. Assim, $H^s(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Portanto a aplicação:

$$\begin{aligned} r_\Omega : H^s(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow H^s(\Omega) \\ u &\longmapsto u|_\Omega. \end{aligned}$$

está bem definida.

Além disso, a aplicação $r_\Omega : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^s(\Omega)$ é linear, sobrejetora, e o $\ker(r_\Omega)$ é um subespaço fechado de $H^s(\mathbb{R}^n)$ (ver ((CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009), p. 266)).

Finalmente definimos uma topologia em $H^s(\Omega)$ que coincide com a topologia métrica usual dos espaços $H^m(\Omega)$ quando $s = m \in \mathbb{N}$. Para isso, consideramos o espaço quociente:

$$H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega) = \{[v]; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\} := \{v + \ker(r_\Omega); v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}.$$

A aplicação $\|\cdot\| : H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\|[v]\| = \inf\{\|\omega\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}; w \in [v]\}, \quad \forall [v] \in H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega).$$

define uma norma no espaço $H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega)$ que o torna um espaço de Banach.

Por outro lado, para cada vetor $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\{w \in H^s(\mathbb{R}^n); w \in v + \ker(r_\Omega)\} = \{w \in H^s(\mathbb{R}^n); r_\Omega(w) = r_\Omega(v)\},$$

pois

$$w \in v + \ker(r_\Omega) \Leftrightarrow w - v \in \ker(r_\Omega) \Leftrightarrow r_\Omega(w - v) = 0 \Leftrightarrow r_\Omega(w) = r_\Omega(v).$$

Assim, a norma de um elemento $[\nu] \in H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega)$ pode ser reescrita como

$$\|[\nu]\| = \inf\{\|\omega\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}; r_\Omega(\omega) = r_\Omega(\nu)\}.$$

Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H^s(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{r_\Omega} & H^s(\Omega) \\ \downarrow \pi & \nearrow [r_\Omega] & \\ H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega) & & \end{array}$$

onde, $[r_\Omega] : H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega) \longrightarrow H^s(\Omega)$ é definida por $[r_\Omega]([\nu]) := r_\Omega(\nu)$, $\forall [\nu] \in H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega)$.

Teorema 1.54

A aplicação $[r_\Omega]$ definida anteriormente é um isomorfismo isométrico.

Demonstração. Ver ((CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009), p. 269). □

Teorema 1.55

Seja $m \in \mathbb{N}$. A norma definida por

$$\|u\|_m := \inf\{\|w\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}; r_\Omega(w) = u\},$$

é equivalente à norma $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$, usual do espaço $H^m(\Omega)$.

Demonstração. Seja $u \in H^m(\Omega)$. Então, $r_\Omega(v) = u$, para algum $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Assim,

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}^2 = \|r_\Omega\|_{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha(r_\Omega(v))\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Usando que $r_\Omega(D^\alpha v) = D^\alpha(r_\Omega v)$, segue:

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|r_\Omega(D^\alpha v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|v\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Portanto, $\|u\|_{H^m(\Omega)}$ é uma cota inferior do conjunto $\{\|w\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}; r_\Omega(w) = u\}$ e, por definição de ínfimo, obtemos $\|u\|_{H^m(\Omega)} \leq \|u\|_m$.

Reciprocamente, como $u \in H^m(\Omega)$, temos $P(u) \in H^m(\mathbb{R}^n)$ e $r_\Omega(P(u)) = u$, onde P é o operador prolongamento, definido no Teorema 1.24. Como P é contínuo, segue que

$$\|u\|_m \leq \|P(u)\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^m(\Omega)},$$

onde $C > 0$ é uma constante associada à continuidade de P . □

Teorema 1.56

Da sobrejetividade da aplicação r_Ω , segue que, para cada $u \in H^s(\Omega)$, existe um $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $u = r_\Omega(v)$. Assim, aplicação definida por

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \|r_\Omega(v)\|_{H^s(\Omega)} = \|[\nu]\|; \quad \forall u \in H^s(\Omega)$$

define uma norma no espaço $H^s(\Omega)$, onde s é um número real não negativo e Ω é um aberto limitado regular do \mathbb{R}^n . Além disso, o espaço $H^s(\Omega)$ munido desta norma é um espaço de Hilbert.

Demonstração. Ver ((CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009), p. 271). \square

Proposição 1.57

$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$ para cada $s \geq 0$.

Demonstração. Ver ((CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009), p. 272). \square

Proposição 1.58

$H^{s_1}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_2}(\Omega)$, sempre que $0 \leq s_2 \leq s_1$.

Demonstração. Ver ((MEDEIROS; MIRANDA, 2000), p. 96). \square

Definição 1.59

Seja Ω um aberto limitado regular. Definimos:

$$H_0^s(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^s(\Omega)} \quad \text{e} \quad H^{-s}(\Omega) = (H_0^s(\Omega))'.$$

Existem outras maneiras de definir os espaço $H^s(\Omega)$, como através da teoria de interpolação em espaços de Hilbert, conforme apresentado por Lions e Magenes em (LIONS; MAGENES, 1968), capítulo 9.

No que segue, definiremos os espaços $H^s(\Gamma)$, onde $\Gamma = \partial\Omega$.

Seja Ω um aberto limitado regular do \mathbb{R}^n com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$. Considere $\{(U_1, \varphi_1), \dots, (U_m, \varphi_m)\}$ um sistema de cartas locais para Γ . A cobertura aberta $\{\Omega, U_1, \dots, U_m\}$ de $\overline{\Omega}$ determina uma partição da unidade $\theta_1, \dots, \theta_m \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$, C^k da subordinada à mesma (Ver Figura 1).

Seja $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Então $u = \sum_{j=1}^m (\theta_j u)$, *q.t.p.* em Γ . Assim, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, a função definida por

$$\tilde{u}_j(y) = \begin{cases} u_j(y) := (\theta_j u)(\varphi_j^{-1}(y)), & \text{se } y \in \Sigma = (0, 1)^{n-1} \\ 0, & \text{se } y \in \mathbb{R}^n / \Sigma \end{cases}$$

é integrável.

Além disso,

$$supp(u_j) \subset \overline{\{x \in \Sigma; u_j(x) \neq 0\}} \subset \Sigma \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma} u d\Gamma = \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma} u \theta_j d\Gamma = \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}_j(y) \tilde{J}(y) dy,$$

onde $d\Gamma$ é a medida superficial de Γ induzida pela medida de Lebesgue, e \tilde{J} é a extensão nula fora de $\Gamma_j = U_j \cap \Gamma$, de um operador diferenciável J_j determinado pela relação:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}_j(y) dy = \int_{\Gamma_j} u \theta_j J_j d\Gamma.$$

Considere o espaço $L^p(\Gamma)$ com respeito a medida superficial Γ . Utilizando a partição da unidade $\theta_1, \dots, \theta_m \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$, temos

$$L^p(\Gamma) = \{u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}; \widetilde{f \theta_j \circ \varphi_j^{-1}} = \tilde{u}_j \in L^p(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ e } j = 1, \dots, m\},$$

onde $\tilde{u}_j = \widetilde{u\theta_j \circ \varphi_j^{-1}}$ é a extensão de $u_j = u\theta_j \circ \varphi_j^{-1}$ à \mathbb{R}^{n-1} zero fora de $\Sigma = (0, 1)^{n-1}$.

Além disso,

$$\|u\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\sum_{j=1}^m \|\tilde{u}_j\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in L^p(\Gamma) \text{ e } 1 \leq p < \infty.$$

De maneira análoga obtém-se as seguintes caracterizações:

$$C^m(\Gamma) = \{v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}; \widetilde{v\theta_j \circ \varphi_j^{-1}} = \tilde{u}_j \in C^m(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ e } j = \{1, \dots, m\}\},$$

$$D(\Gamma) = \{v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}; \widetilde{v\theta_j \circ \varphi_j^{-1}} = \tilde{u}_j \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ e } j = \{1, \dots, m\}\}.$$

Definição 1.60

Para $s > 0$, define-se

$$H^s(\Gamma) = \{u; \phi_j(u) \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}) \text{ e } j = 1, \dots, m\}, \text{ onde}$$

$$\begin{aligned} \phi_j : D(\Gamma) &\longrightarrow D(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u &\longmapsto \tilde{u}_j = \widetilde{u\theta_j \circ \varphi_j^{-1}} \end{aligned}$$

Teorema 1.61

O conjunto $H^s(\Gamma)$ munido da norma definida por:

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} = \left(\sum_{j=1}^m \|\phi_j(u)\|_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

é um espaço de Hilbert. Além disso, $D(\Gamma)$ é denso em $H^s(\Gamma)$.

Demonstração. Ver ((CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009), p. 281). □

Definição 1.62

Seja $s > 0$ um número real. Definamos o espaço dual forte, $H^{-s}(\Gamma) := [H^s(\Gamma)]'$.

1.3.3 O Teorema do Traço

Para finalizar a seção apresentaremos o Teorema do traço. Ele estende e formaliza a ideia intuitiva de avaliar funções no bordo de um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, proporcionando uma maneira rigorosa de lidar com problemas de fronteira em espaços funcionais. Enquanto funções suaves podem ser diretamente avaliadas em $\partial\Omega$, o Teorema do Traço garante que funções pertencentes a espaços de Sobolev, que podem não ser suaves, também admitam restrições bem definidas à fronteira, desde que satisfaçam certos critérios de regularidade.

Teorema 1.63 (Teorema do Traço)

Para cada $m \in \mathbb{N}$, existe uma única aplicação linear, contínua e sobrejetiva:

$$\begin{aligned}\gamma: H^m(\Omega) &\longrightarrow \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u &\longmapsto (\gamma_0(u), \gamma_1(u), \dots, \gamma_{m-1}(u)),\end{aligned}$$

tal que

$$(\gamma_0(u), \gamma_1(u), \dots, \gamma_{m-1}(u)) = \left(u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma}, \dots, \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}|_{\Gamma} \right), \quad \forall u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}),$$

onde $\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}$ é a j -ésima derivada normal de u .

O espaço $\prod_{j=0}^n H^{m-j-1/2}(\Gamma)$ é munido da topologia induzida pela norma:

$$\|w\|_{\prod_{j=0}^n H^{m-j-1/2}(\Gamma)} = \sum_{j=0}^{m-1} \|w_j\|_{H^{m-j-1/2}(\Gamma)}, \quad \forall w = (w_0, w_1, \dots, w_{m-1}) \in \prod_{j=0}^n H^{m-j-1/2}(\Gamma).$$

Além disso,

- (i) $\ker(\gamma) = H_0^m(\Omega)$.
- (ii) A inversa à direita de γ é uma aplicação linear e contínua.

Demonstração. Ver ((CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009), p. 387). □

A aplicação γ definida no Teorema 1.63 é denominada *aplicação traço em $H^m(\Omega)$* .

Teorema 1.64 (Fórmula de Green Generalizada)

Sejam $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto regular com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$. Então:

$$\langle \Delta u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \gamma_1(u), \gamma_0(v) \rangle_{L^2(\Gamma)},$$

onde $\gamma_1(u), \gamma_0(v) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Demonstração. ver ((CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009), p. 413). □

Capítulo 2

A Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares Limitados e o Problema Abstrato de Cauchy

A jornada pela resolução de problemas físicos e matemáticos complexos frequentemente nos conduz ao território das Equações Diferenciais Parciais (EDPs). No entanto, a mera apresentação de uma EDP é insuficiente para caracterizar um problema bem posto, é a imposição de condições complementares, as condições iniciais e de contorno, que transforma uma equação em um modelo que realmente representa um fenômeno real ou a ele se aproxima. Este capítulo tem como objetivo principal fornecer as ferramentas teóricas robustas e unificadas necessárias para a resolução dos problemas que serão propostos nos capítulos subsequentes. Mais do que um conjunto de técnicas avulsas, apresentaremos uma estrutura conceitual poderosa para o estudo de EDPs quando estas são formuladas como um Problema de Valor Inicial de Cauchy em espaços funcionais adequados. A escolha estratégica desses espaços, é crucial, pois é ela que supre ou, de maneira equivalente, incorpora as condições de contorno do problema, internalizando-as na própria estrutura do espaço onde a solução será buscada.

Em nosso percurso inicial pelo estudo de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) em espaços vetoriais de dimensão finita, aprendemos que a função exponencial e^{tA} emerge como a solução natural e elegante para um problema de valor inicial linear autônomo. A solução flui de maneira suave a partir da condição inicial, "transportada" pela ação do operador exponencial. A grande questão que orienta este capítulo é: como estender essa noção intuitiva e poderosa de exponencial, e, portanto, de solução, para um problema de valor inicial de Cauchy linear autônomo definido em espaços vetoriais de dimensão infinita?

Veremos que, para a classe restrita de operadores lineares limitados (contínuos), essa extensão é direta e natural, podendo ser definida por meio de uma série de potências análoga à série da exponencial clássica. No entanto, a realidade dos problemas mais interessantes da física matemática nos confronta com uma dificuldade fundamental: pense no operador Laplaciano na equação do calor ou na equação de onda, os operadores que os definem são ilimitados. Esta quebra de continuidade

representa um obstáculo profundo, pois a série de potências deixa de convergir, e a definição simples de exponencial colapsa.

É precisamente diante dessa dificuldade que surge uma das teorias mais belas e frutíferas da análise funcional: a Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares Limitados. Um semigrupo pode ser entendido como a generalização adequada da função exponencial definida por um operador ilimitado. Esta teoria, que abordaremos com detalhes na primeira seção deste capítulo, não apenas resolve o problema da existência e unicidade de soluções por meio de teoremas de geração de semigrupos, como o célebre Teorema de Hille-Yosida, mas também permite uma análise refinada da estabilidade e do comportamento assintótico das soluções, investigando, por exemplo, se elas decaem exponencialmente ou apresentam crescimento controlado ao longo do tempo.

2.1 Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares Limitados

Nesta seção, desenvolveremos a teoria de semigrupos de operadores lineares limitados, com o objetivo de estabelecer os fundamentos necessários para demonstrar a boa colocação (existência e unicidade de solução) dos problemas que serão abordados nos três últimos capítulos desta tese. Essa fundamentação será alcançada mediante a combinação dos Teoremas de Geração de Semigrupos Lineares com os resultados clássicos de existência e unicidade para o problema abstrato de Cauchy, conforme apresentado na obra de referência ([PAZY, 1983](#)).

A Teoria de Semigrupos foi desenvolvida como uma abordagem unificada para reformular equações diferenciais parciais na forma de problemas de valor inicial de Cauchy em espaços funcionais abstratos, particularmente em espaços de Banach. Essa reformulação proporciona um tratamento sistemático e padronizado para EDPs, facilitando tanto a análise teórica quanto a resolução de problemas em contextos gerais e abstratos.

O objetivo fundamental dessa teoria consiste em generalizar o conceito de função exponencial, que representa a solução natural para equações diferenciais ordinárias lineares em dimensões finitas, para cenários mais amplos envolvendo operadores em espaços de dimensão infinita. A teoria se fundamenta nas propriedades essenciais da exponencial, adaptando esses conceitos ao contexto de operadores lineares em espaços funcionais.

Na contemporaneidade, a Teoria de Semigrupos consolida-se como um conjunto de ferramentas matemáticas robustas e versáteis para estudar a evolução temporal de sistemas dinâmicos lineares. Sua estrutura abrangente permite abordar uma extensa variedade de problemas, ampliando significativamente o alcance dos métodos clássicos aplicados ao estudo qualitativo e quantitativo de equações diferenciais parciais lineares.

2.1.1 A Função Exponencial

A função $u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $u(t) = x_0 e^{at}$ é uma solução globalmente definida para a seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u'(t) = au(t); & t > 0, \\ u(0) = x_0, \end{cases}$$

onde a e x_0 são constantes reais dadas.

Utilizando a expansão em Fórmula de Taylor, é possível estender a noção de exponencial de um número para exponencial de uma matriz quadrada A , definindo:

$$e^{tA} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tA)^j}{j!} = I + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + \frac{t^3}{6} A^3 + \cdots + \frac{t^j}{j!} A^j + \cdots, \quad (2.1)$$

onde I é a matriz identidade.

Assim, se A é uma matriz quadrada de ordem n e $u_0 \in \mathbb{R}^n$, a curva $u_0 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $u(t) = e^{tA} u_0$ é solução da equação diferencial ordinária matricial:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t); & t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $u(t)$ é visto como matriz coluna.

A função exponencial matricial $S(t) = e^{tA}$ é caracterizada por três propriedades fundamentais:

- $S(0) = I$;
- $S(t+s) = S(t)S(s)$;
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t) = I$.

Essas propriedades permitem estender o conceito de exponencial para operadores lineares limitados em espaços de Banach. Suponha que X seja um espaço de Banach e $A : X \rightarrow X$ é um operador linear limitado. A série definida pela expressão (2.1) é absolutamente convergente no espaço $\mathcal{L}(X)$ dos operadores lineares limitados sobre X , devido a sua estrutura natural de espaço normado dada pela norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)} : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$\|A\| = \inf\{C \in \mathbb{R}; \|Ax\|_X \leq C\|x\|_X, \forall x \in X\} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_X}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_X.$$

Especificamente, para cada $t > 0$, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|(tA)^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A\|^n}{n!}.$$

Assim, definindo $S(t) = e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$, as seguintes propriedades são satisfeitas:

- $S(0) = I: X \rightarrow X$ é o operador identidade,
- $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \geq 0$,
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$.

Além disso, a curva $u: [0, +\infty) \rightarrow X$, definida por $u(t) = S(t)u_0$ é solução do problema (2.2), com $A \in \mathcal{L}(X)$ e $u_0 \in X$. De fato, como

$$S(t) = e^{tA} := I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \frac{t^4 A^4}{4!} + \dots$$

segue que

$$\frac{d}{dt}^+ S(t) = \frac{d}{dt}^+ e^{tA} := A + tA^2 + \frac{t^2 A^3}{2!} + \frac{t^3 A^4}{3!} + \dots$$

Logo

$$\frac{d}{dt}^+ S(t) = \frac{d}{dt}^+ e^{tA} := A \left[I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots \right] = Ae^{tA}.$$

Portanto

$$\frac{d}{dt}^+ S(t) = AS(t).$$

Note que

$$\left[\frac{d}{dt}^+ S(t) \right]_{t=0} = AS(0) = AI = A.$$

Em razão desta propriedade, dizemos que $A = \left[\frac{d}{dt}^+ S(t) \right]_{t=0}$ é o *gerador infinitesimal* da coleção de operadores lineares limitados $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Finalmente, definindo $u(t) = S(t)u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} u_0$, temos:

$$u'(t) = \frac{d}{dt}^+ S(t)u_0 = AS(t)u_0 = Au(t),$$

com $u(0) = S(0)u_0 = Iu_0 = u_0$.

Observe que, se o operador linear A não é limitado, não dispomos de uma norma para ele, e, consequentemente a expressão (2.1) perde o significado. No entanto, para verificar se $u(t) = S(t)u_0$ é solução do problema de Cauchy (2.2), não utilizamos explicitamente a expressão analítica de $S(t)$, mas apenas as suas propriedades características fundamentais.

Por esta razão, no caso em que o operador linear $A: X \rightarrow X$ é não limitado, torna-se natural estudar coleções de operadores lineares $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ que satisfaçam as propriedades fundamentais da exponencial, com a condição adicional:

$$\left[\frac{d}{dt}^+ S(t) \right]_{t=0} = A. \tag{2.3}$$

2.1.2 Semigrupo Uniformemente Contínuo e Semigrupo Fortemente Contínuo

Definição 2.1

Seja $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados em um espaço de Banach X . Dizemos que uma aplicação $S : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ é um *semigrupo de operadores lineares limitados sobre X* , quando as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $S(0) = I$, onde I é o operador identidade.

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, para todo $t, s \geq 0$.

Dizemos que o semigrupo S é *uniformemente contínuo* se satisfaz

(iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$.

No que segue, chamaremos frequentemente de semigrupo simplesmente a coleção $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, para nos referirmos a um semigrupo de operadores lineares $S : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$. Quando o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é uniformemente contínuo o operador A definido pela expressão (2.3) é chamado de *gerador infinitesimal do semigrupo S* .

Exemplo 2.2

Seja $A \in \mathcal{L}(X)$ um operador linear limitado sobre o espaço de Banach X . Então, a coleção $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, onde $S(t) = e^{tA}$ é um semigrupo de operadores lineares uniformemente contínuo, com A como o seu gerador infinitesimal. De fato, seja $A : X \rightarrow X$ um operador linear limitado sobre um espaço de Banach X . Defina $S(t) = e^{tA}$. Assim, para cada número real $t \geq 0$ e $x \in X$, tem-se

$$S(t)x = e^{tA}x = x + tAx + \frac{t^2}{2}A^2x + \frac{t^3}{6}A^3x + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n x + \cdots$$

Então

$$\begin{aligned} \|S(t)x - x\|_X &= \left\| tAx + \frac{t^2}{2}A^2x + \frac{t^3}{6}A^3x + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n x + \cdots \right\|_X \\ &\leq t\|A\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_X + \frac{t^2}{2}\|A\|_{\mathcal{L}(X)}^2\|x\|_X + \frac{t^3}{6}\|A\|_{\mathcal{L}(X)}^3\|x\|_X + \cdots + \frac{t^n}{n!}\|A\|_{\mathcal{L}(X)}^n\|x\|_X + \cdots \\ &= t\|A\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_X \left[1 + \frac{t}{2}\|A\|_{\mathcal{L}(X)} + \frac{t^2}{6}\|A\|_{\mathcal{L}(X)}^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{n!}\|A\|_{\mathcal{L}(X)}^{n-1} + \cdots \right] \\ &\leq t\|A\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_X \left[1 + t\|A\|_{\mathcal{L}(X)} + \frac{t^2\|A\|_{\mathcal{L}(X)}^2}{2} + \cdots + \frac{\|A\|_{\mathcal{L}(X)}^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \right] \\ &= te^{t\|A\|_{\mathcal{L}(X)}}\|A\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\|_X. \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{\|S(t)x - x\|_X}{\|x\|_X} \leq te^{t\|A\|_{\mathcal{L}(X)}}\|A\|_{\mathcal{L}(X)}$$

Portanto $\|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$.

Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}^+ S(t) &= A + tA^2 + \frac{t^2}{2}A^3 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \dots \\ &= A \left[1 + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1} + \dots \right] \\ &= Ae^{tA}.\end{aligned}$$

Portanto $\left[\frac{d}{dt}^+ S(t) \right]_{t=0} = A$.

A recíproca do resultado apresentado no exemplo anterior também é verdadeira (ver (PAZY, 1983), p. 2-4). Em suma, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo, se e somente se $S(t) = e^{tA}$, onde seu gerador infinitesimal A é um operador linear limitado. Observe que a proposição anterior implica que um operador não limitado A não pode ser gerador de um semigrupo uniformemente contínuo. Com base nisso, introduzimos a seguinte definição:

Definição 2.3

Seja $S: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ um semigrupo de operadores lineares limitados sobre um espaço de Banach X . Dizemos que S é um C_0 -semigrupo ou simplesmente um *semigrupo fortemente contínuo* se satisfaz

$$(iv) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - x\|_X = 0; \quad \forall x \in X.$$

Um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo que não é uniformemente contínuo deve ser, necessariamente, um operador linear não limitado. Como operadores lineares não limitados em espaços de Banach possuem domínio de definição em um subespaço $D(A) \subset X$, temos o seguinte conceito de gerador infinitesimal:

Definição 2.4

Seja $S: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ um C_0 -semigrupo sobre um espaço de Banach X . Dizemos que o operador $A: D(A) \subset X \rightarrow X$ é o *gerador infinitesimal do semigrupo* S quando:

$$Ax := \left[\frac{d}{dt}^+ S(t)x \right]_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}; \quad \forall x \in D(A), \quad (2.4)$$

onde

$$D(A) = \{x \in X; Ax \in X\}.$$

Proposição 2.5

Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo sobre um espaço de Banach X . Existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega t}; \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Ver ((PAZY, 1983), p. 4). □

Na Proposição acima, quando $\omega = 0$, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é chamado de *limitado*. Se além disso, $M = 1$, dizemos $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contrações.

Proposição 2.6

Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre um espaço de Banach X . Então $D(A)$ é um subespaço denso em X e A é um operador linear fechado

Demonstração. Ver ((PAZY, 1983), p. 5-6). □

Exemplo 2.7

Considere a aplicação $S : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ definida por $[S(t)f](x) = f(x + t)$. Afirmamos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contrações, mas não é uniformemente contínuo. Com efeito

(i) Dado $f \in L^2(\mathbb{R})$, temos $[S(0)f](x) = f(x); \forall x \in \mathbb{R}$. Logo $S(0)f = f$.

(ii) Dados $t, s \geq 0$ e $f \in L^2(\mathbb{R})$, segue que:

$$[S(t+s)f](x) = f(t+s+x) = [S(t)f](s+x) = [S(t)S(s)f](x); \forall x \in \mathbb{R}.$$

(iv) Dado $f \in L^2(\mathbb{R})$, do Teorema da Convergência Dominada (Teorema A.2):

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)f - f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)|^2 dx = 0.$$

$\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo de contrações, pois como

$$\|S(t)f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x+t)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2; \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

tem-se $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))} = 1; \forall t \geq 0$.

Além disso, note que:

$$\left[\frac{d}{dt} [S(t)f](x) \right]_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = f'(x).$$

Assim, o gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é o operador $\partial_x : H^1(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, definido por $(\partial_x f) = f'$; $\forall f \in H^1(\mathbb{R})$.

Como ∂_x não é um operador linear não limitado, tem-se que o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ gerado por ele não é uniformemente contínuo (isto é, não satisfaz a condição (iii)). De fato. Tomando a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções em $L^2(\mathbb{R})$ definida por:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Note que

$$\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0,$$

e, portanto $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada. Contudo

$$\|\partial_x f_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_0^1 n^2 x^{2(n-1)} dx = \frac{n^2}{2n-1} \rightarrow +\infty.$$

Logo, $(\partial_x f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não é uma sequência limitada. Portanto ∂_x não é um operador linear limitado, e, consequentemente, o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ não é uniformemente contínuo.

O próximo resultado demonstra que, de fato, um C_0 -semigrupo se comporta de maneira análoga à exponencial. Por essa razão, é comum adotar a notação $S(t) = e^{tA}$, para representar um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ gerado pelo operador linear não limitado A .

Teorema 2.8

Sejam $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre um espaço de Banach X e $u_0 \in X$. Defina $u : [0, +\infty) \rightarrow X$ por $u(t) = S(t)u_0 := e^{tA}u_0$. Então $u \in C^0([0, +\infty); X)$ satisfaz

$$u(t) = A \left(\int_0^t S(s)u_0 ds \right) + u_0 = A \left(\int_0^t u(s) ds \right) + u_0; \quad \forall t \geq 0. \quad (2.5)$$

Além disso, se $u_0 \in D(A)$ então

$$u \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1((0, +\infty); X),$$

e é a única solução do problema de Cauchy linear e homogêneo:

$$\begin{cases} u'(t) - Au(t) = 0; & t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (2.6)$$

Demonstração. Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo sobre X , $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ o seu gerador infinitesimal e $u_0 \in X$. Dados $t \geq 0$ e $h \geq 0$ pequeno de modo que $t - h \geq 0$, da Proposição 2.5, segue que

$$\begin{aligned} \|u(t+h)u_0 - u(t)u_0\|_X &= \|S(t+h)u_0 - S(t)u_0\|_X &= \|S(t)S(h)u_0 - S(t)u_0\|_X \\ &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|S(h)u_0 - u_0\|_X \\ &\leq M e^{wt} \|S(h)u_0 - u_0\|_X \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|u(t-h)u_0 - u(t)u_0\|_X &= \|S(t-h)u_0 - S(t)u_0\|_X &= \|S(t-h)u_0 - S(t-h+h)u_0\|_X \\ &\leq \|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \|u_0 - S(h)u_0\|_X \\ &\leq M e^{wt} \|u_0 - S(h)u_0\|_X. \end{aligned}$$

Portanto $u \in C^0([0, +\infty); X)$.

Além disso, como

$$\begin{aligned}\frac{S(t) - I}{h} \int_0^t S(s)u_0 \, ds &= \frac{1}{h} \int_0^t (S(s+h)u_0 - S(s)u_0) \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)u_0 \, ds - \frac{1}{h} \int_0^h S(s)u_0 \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s) \, ds - \frac{1}{h} \int_0^h u(s) \, ds,\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}A \left(\int_0^t u(s) \, ds \right) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - I}{h} \int_0^t S(s)u_0 \, ds \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(s) \, ds - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h u(s) \, ds \\ &= u(t) - u_0,\end{aligned}$$

o que prova (2.5).

Agora, suponha que $u_0 \in D(A)$. Então

$$Au_0 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)u_0 - u_0}{h} \in X. \quad (2.7)$$

Seja $t > 0$ e $h > 0$ pequeno, de modo que $t - h > 0$. Como

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \frac{S(t+h)u_0 - S(t)u_0}{h} = S(t) \frac{S(h)u_0 - u_0}{h}$$

e

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \frac{S(h+t)u_0 - S(t)u_0}{h} = \frac{S(h)[S(t)u_0 - S(t)u_0]}{h}$$

temos que

$$\frac{d}{dt}^+ u(t) = S(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)u_0 - u_0}{h} = S(t)Au_0 \in X.$$

e

$$\frac{d}{dt}^+ u(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)[S(t)u_0 - S(t)u_0]}{h} = AS(t)u_0 \in X.$$

Portanto $S(t)u_0 \in D(A)$, e da unicidade do limite, segue que

$$\frac{d}{dt}^+ u(t) = Au(t) = S(t)Au_0. \quad (2.8)$$

Por outro lado,

$$\frac{u(t) - u(t-h)}{h} - S(t)Au_0 = S(t-h) \left[\frac{S(h)u_0 - u_0}{h} - Au_0 \right] + [S(t-h)Au_0 - S(t)Au_0].$$

Assim, de (2.7) e da continuidade da curva $t \mapsto S(t)x$ ($x \in X$), temos respectivamente:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} S(t-h) \left[\frac{S(h)u_0 - u_0}{h} - Au_0 \right] = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} [S(t-h)Au_0 - S(t)Au_0] = 0.$$

Logo

$$\frac{d}{dt}^- u(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(t) - u(t-h)}{h} = S(t)Au_0. \quad (2.9)$$

Portanto, de (2.8) e (2.9), temos que $u \in C^1([0, +\infty); X)$ e tal que

$$u'(t) = \frac{d}{dt}u(t) = Au(t); \forall t \geq 0.$$

Além disso $u(0) = S(0)u_0 = Iu_0 = u_0$.

Considere o subespaço $D(A)$ com a norma do gráfico definida por:

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X.$$

Da Proposição 2.6, segue que A é fechado, e portanto $D(A)$ é completo.

Agora, se $u_0 \in D(A)$, em (2.8), vimos que: $AS(t)u_0 = S(t)u_0; \forall t \geq 0$. Assim, se $t_0 \geq 0$, tem-se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} u_t(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} AS(t)u_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} S(t)Au_0 = S(t_0)Au_0 = AT(t_0)u_0 = u_t(t_0).$$

Portanto $u \in C^0([0, +\infty); D(A))$.

Para provar a unicidade, suponha que exista outra solução $v(t) : [0, +\infty) \rightarrow X$ para o problema (2.6). Agora defina $w = u - v$. Note que $w(0) = u(0) - v(0) = u_0 - u_0 = 0$, e

$$w'(t) = (u - v)'(t) = u'(t) - v'(t) = Au(t) - Av(t) = A(u - v)(t) = Aw(t); \forall t > 0.$$

Logo, w é solução do problema (2.6) para o valor inicial $w_0 = 0$. Então, pelo que visto acima, para cada $t \geq 0$, tem-se $w(t) = S(t)0 = 0$. Portanto, $w \equiv 0$, isto é, $u = v$. \square

Definição 2.9

Seja X um espaço de Banach.

- (i) Uma função $u \in C^0([0, +\infty); X)$ satisfazendo (2.5) é chamada de *solução branda (mild solution)* para o problema de Cauchy linear e homogêneo (2.6).
- (ii) Uma função $u \in C^0([0, +\infty); X) \cap C^1((0, +\infty); X)$ satisfazendo o problema pontual de Cauchy (2.6) é chamada de *solução regular (clássica)*

2.2 O Problema abstrato de Cauchy

Na seção anterior, estabelecemos, por meio do Teorema 2.8, que, se um operador linear ilimitado $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ em um espaço de Banach X , então a função $u(t) = S(t)u_0$ apresenta propriedades análogas às da função exponencial. Essa analogia fundamental garante que $u(t) = S(t)u_0$ seja a solução do problema de Cauchy linear homogêneo (2.6) associado ao operador A , fornecendo assim a base para a análise de sistemas dinâmicos lineares autônomos. Esse resultado será utilizado para provar a boa colocação do problema linear (4.1)–(4.3), estudado no Capítulo 4.

Nesta seção, nosso objetivo é completar o estudo da boa colocação (existência e unicidade de soluções) do problema abstrato de Cauchy, estendendo a análise para dois casos importantes: o caso não homogêneo e o caso não autônomo. Primeiramente, abordaremos o problema não homogêneo, que pode ser linear ou conter uma não linearidade separável da parte linear descrita pelo gerador de um C_0 -semigrupo. Em seguida, apresentaremos resultados de boa colocação para o problema de Cauchy linear não autônomo, concentrando-nos no caso particular em que, para cada $t \geq 0$, os operadores lineares $A(t)$ possuem o mesmo domínio fixo e são geradores de uma família de C_0 -semigrupos.

A extensão para o caso não homogêneo, representado pela equação $u'(t) - Au(t) = f(t)$, introduz uma fonte externa $f(t)$, enriquecendo a modelagem de fenômenos físicos. Mostraremos que, sob condições apropriadas sobre f , a solução pode ser representada pela conhecida fórmula da variação das constantes:

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s) \, ds,$$

onde $S(t)_{t \geq 0}$ é o C_0 -semigrupo gerado pelo operador linear A . Além disso, discutiremos os conceitos de solução branda, solução forte e solução clássica, esclarecendo as condições necessárias para que uma solução branda se torne uma solução clássica ou forte.

Ademais, a teoria será generalizada para o contexto de problemas não lineares autônomos da forma $u'(t) - Au(t) = f(t, u(t))$, em que a não linearidade f é separada do operador linear A . Para tal, utilizaremos técnicas de ponto fixo, assumindo que f satisfaz condições de Lipschitz ou de Lipschitz local. Isso nos permitirá estabelecer existência e unicidade de soluções, seja globalmente no tempo ou localmente (com possibilidade de explosão em tempo finito). Esses resultados serão fundamentais para demonstrar a boa colocação do problema não linear (5.3)–(5.6), que será tratado no Capítulo 5.

Finalmente, esta seção avança de forma significativa ao tratar do cenário não autônomo, no qual o operador A depende explicitamente do tempo, isto é, $A = A(t)$. Esse caso é consideravelmente mais complexo, pois a teoria de semigrupos padrão, baseada em operadores constantes no tempo, não pode ser aplicada diretamente. Contudo, para uma classe particular de problemas, aqueles em que os operadores lineares $A(t)$ possuem um domínio comum independente do tempo e formam uma família estável de geradores de semigrupos, é possível desenvolver uma teoria consistente. Nesse contexto, apresentaremos os fundamentos dos sistemas CD de Kato, que estabelecem as condições sob as quais é possível construir um processo de evolução linear $\{P(s, t)\}_{t \geq s}$, o qual generaliza a noção de semigrupo. Esse aparato teórico será essencial para demonstrar a boa colocação do problema não autônomo (6.2)–(6.6), que será analisado no Capítulo 6.

2.2.1 Problema abstrato de Cauchy não homogêneo

Consideremos agora o problema de Cauchy linear não homogêneo:

$$\begin{cases} u'(t) - Au(t) = f(t); & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \quad (2.10)$$

onde $f : [0, +\infty) \rightarrow X$ e X é um espaço de Banach.

Definição 2.10

Uma função $u : [0, +\infty) \rightarrow X$ é uma solução (clássica) do problema linear não-homogêneo (2.10), se $u \in C^0([0, +\infty); X) \cap C^1((0, +\infty); X)$, $u(t) \in D(A)$, para $t > 0$ e (2.10) é satisfeita.

Seja $S(t) = e^{tA}$ o C_0 -semigrupo de contrações gerado pelo operador A , e seja $u : [0, +\infty) \rightarrow X$ uma solução para o problema não-homogêneo (2.10). Para, $t > 0$, defina $g_t : [0, t) \rightarrow X$, por $g(s) = S(t-s)u(s)$. Note que g é diferenciável para $0 < s < t$, e usando (2.8), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}g(s) &= -AS(t-s)u(s) + S(t-s)u'(s) \\ &= -AS(t-s)u(s) + S(t-s)Au(s) + S(t-s)f(s) \\ &= S(t-s)f(s). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Se $f \in L^1(0, +\infty; X)$, podemos integrar (2.11) de 0 a t e obter:

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s) \, ds; \quad \forall t > 0. \quad (2.12)$$

A função $u \in C^0([0, +\infty); X)$ definida por (2.12) satisfaz:

$$u(t) = A \left(\int_0^t u(s) \, ds \right) + \int_0^t f(s) \, ds + u_0; \quad \forall t \geq 0. \quad (2.13)$$

Definição 2.11

Seja X um espaço de Banach.

- (i) Uma função $u \in C^0([0, +\infty); X)$ satisfazendo (2.13) é chamada de *solução branda* (mild solution) para o problema de Cauchy linear não-homogêneo (2.10).
- (ii) Uma função $u \in C^0([0, +\infty); X) \cap C^1((0, +\infty); X)$ satisfazendo o problema pontual de Cauchy (2.10) é chamada de *solução (clássica)*.

Observe que a continuidade da função f , em geral, não é suficiente para garantir a existência de soluções de (2.10), mesmo quando $u_0 \in D(A)$. Para ilustrar isso, considere um elemento $x \in X$ tal que $S(t) = e^{tA}x \notin D(A)$ para nenhum $t \geq 0$. Defina $f(t) = e^{tA}x$. Note que f é contínua. Contudo, a única solução branda (mild solution), do problema (2.10) para $u_0 = 0 \in D(A)$ e $f(t) = e^{tA}x$ é dada por $u(t) = te^{tA}x$, que não é diferenciável para $t > 0$.

Teorema 2.12

Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre o espaço de Banach X . Então

- (i) Se $f \in L^1(0, +\infty; X)$, então para cada $u_0 \in X$, o problema linear não-homogêneo (2.10) tem uma única solução branda (mild solution) definida por (2.12).
- (ii) Se $f \in C^1((0, +\infty); X)$, então para cada $u_0 \in D(A)$, a solução u definida por (2.12) é um solução (clássica).

Demonstração. Ver ((PAZY, 1983), p. 106-107). □

Definição 2.13

Seja X um espaço de Banach. Uma função $u : [0, +\infty) \rightarrow X$ é uma *solução forte* do problema (2.10) se:

- (i) $u \in W^{1,1}(0, +\infty; X)$;
- (ii) $u(0) = u_0$ e $u'(t) = Au(t) + f(t)$ em quase todo ponto $t > 0$.

Teorema 2.14

Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo sobre o espaço de Banach X . Se $f \in W^{1,1}(0, +\infty; X)$, então, para todo $u_0 \in D(A)$, a função u definida (2.12) é a única solução forte do problema linear não-homogêneo (2.10).

Demonstração. Ver ((PAZY, 1983), p. 109). □

Corolário 2.15

Seja X um espaço de Banach reflexivo e seja A o gerador de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre X . Se f é Lipschitziana, então para $u_0 \in D(A)$, o problema não-homogêneo (2.10) admite uma única solução (clássica) dada por (2.12).

Demonstração. Ver ((PAZY, 1983), p. 109-110). □

Embora a Teoria de Semigrupos de Operadores Lineares tenha sido desenvolvida primordialmente para o estudo de problemas lineares autônomos, seu alcance pode ser estendido mediante a incorporação de propriedades e técnicas adicionais. Esta extensão permite demonstrar a boa colocação de problemas não lineares autônomos específicos nos quais é possível separar a parte linear da componente não linear do problema. De forma ainda mais notável, essa abordagem mostra-se aplicável, ainda que em contextos particulares de natureza simplificada, a certos problemas não autônomos.

Neste contexto, com o objetivo de estabelecer a boa colocação do problema não linear (5.3)-(5.6) formulado no Capítulo 5, utilizaremos resultados de existência e unicidade de soluções para o

problema de Cauchy não linear, conforme apresentado em (**PAZY, 1983**). Considere o problema:

$$\begin{cases} u'(t) - Au(t) = f(t, u(t)); t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \quad (2.14)$$

onde $f : [0, +\infty) \times X \rightarrow X$ e X é um espaço de Banach.

Suponhamos que A é gerador infinitesimal de C_0 -semigrupo sobre X e que $f : [0, +\infty) \times X \rightarrow X$ é contínua sobre a variável $t \in [0, +\infty)$ e satisfaz a condição de Lipschitz sobre a variável $u \in X$.

O problema de valor inicial (2.14) não admite necessariamente uma solução (de qualquer tipo). Entretanto, se ele tiver uma solução clássica ou forte, o argumento apresentado para o modelo linear garante que essa solução u satisfaz a seguinte equação integral:

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s, u(s)) \, ds; \forall t > 0. \quad (2.15)$$

Definição 2.16

Um solução $u \in C^0([0, +\infty); X)$ da equação integral (2.15) é chamada de *solução branda (mild solution)* do problema não-linear (2.14).

Definição 2.17

Seja X um espaço de Banach. Uma função $u : [0, +\infty) \rightarrow X$ é uma *solução forte* do problema (2.14) se:

- (i) $u' \in W^{1,1}(0, +\infty; X)$;
- (ii) $u(0) = u_0$ e $u'(t) = Au(t) + f(t, u(t))$ em quase todo ponto $t > 0$.

Definição 2.18

Seja X um espaço de Banach. Uma função $u \in C^0([0, +\infty); X) \cap C^1((0, +\infty); X)$ satisfazendo o problema pontual de Cauchy (2.14) é chamada de *solução (clássica)*

Teorema 2.19

Seja $f : [0, +\infty) \times X \rightarrow X$ uma função contínua na variável $t \in [0, \infty)$ e Lipschitziana sobre a variável $u \in X$. Se A é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo sobre o espaço de Banach X , então para cada $u_0 \in X$ o problema de Cauchy não-linear (2.14) admite uma única solução branda $u \in C([0, +\infty); X)$. Além disso, a aplicação

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow C([0, +\infty); X) \\ u_0 &\longmapsto u \end{aligned}$$

é Lipschitziana.

Demonstração. Ver ((**PAZY, 1983**), p. 184). □

A condição uniforme de Lipschitz da função f no teorema anterior garante a existência e unicidade de solução global, isto é de solução definida para todo $t > 0$. Contudo, essa condição restringe muito os termos não lineares do problema. No próximo resultado, enfraquecemos essa condição, mas garantimos apenas a existência de solução local.

Teorema 2.20

Seja $f : [0, +\infty) \times X \rightarrow X$ uma função contínua na variável $t \geq 0$ e localmente Lipschitz sobre a variável $u \in X$, uniformemente em t sobre intervalos limitados. Se A é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo sobre o espaço de Banach X , então para cada $u_0 \in X$, existe um $0 < t_{\max} \leq +\infty$, tal que o problema de Cauchy não-linear (2.14) adimite uma única solução branda $u \in C([0, +\infty); X)$ sobre $[0, +t_{\max})$. Além disso, se $t_{\max} < +\infty$, então

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}^-} \|u(t)\| = \infty$$

Demonstração. Ver ((PAZY, 1983), p. 185-186). □

Teorema 2.21

Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre o espaço de Banach X . Se $f \in C^1([0, +\infty) \times X; X)$, então a solução branda do problema (2.14) é uma solução clássica quando $u_0 \in D(A)$.

Demonstração. Ver ((PAZY, 1983), p. 187). □

Teorema 2.22

Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre o espaço de Banach reflexivo X . Suponha que f é Lipschitziana na variável $t \geq 0$, uniformemente para conjuntos limitados de X e localmente Lipschitz sobre a variável $u \in X$, uniforme em conjuntos intervalos limitados $[0, T]$. Se $u_0 \in D(A)$, então a solução branda (mild solution) do problema (2.14) sobre $[0, t_{\max})$ é uma solução forte.

Demonstração. Ver ((PAZY, 1983), p. 185 e p. 189). □

2.2.2 Problema abstrato de Cauchy não-autônomo

Para concluir esta seção, apresentaremos resultados de existência e unicidade de soluções estabelecidos em (KATO, 1985), aplicáveis a uma classe particular de problemas lineares autônomos de Cauchy. A característica fundamental dessa classe reside no fato de que o operador linear dependente do tempo associado ao problema possui um domínio independente do parâmetro temporal. A combinação desses resultados com aqueles fornecidos em (PAZY, 1983) fornece as ferramentas necessárias para demonstrar a boa colocação do problema não autônomo (6.2)–(6.6) proposto no Capítulo 6.

Consideremos, para isso, o seguinte problema linear não autônomo:

$$\begin{cases} u'(t) - A(t)u = f(t); & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \quad (2.16)$$

onde $A(t) : D(A(t)) \subset X \rightarrow X$ um operador linear tempo-dependente e $f : [0, +\infty) \rightarrow X$ uma função contínua.

Definição 2.23

Seja $(\{A(t)\}_{t \geq 0}, X, Y)$ uma tripla, onde X e Y são espaços de Banach separáveis, com $Y \subset X$ e para cada $t \geq 0$, $A(t) : D(A(t)) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear. Dizemos que o sistema $(\{A(t)\}_{t \geq 0}, X, Y)$ é um *sistema CD de Kato* se satisfaz as seguintes condições:

- (i) Y está imerso continuamente e é denso em X e $D(A(t)) = Y$ para todo $t \geq 0$. Em particular, o domínio $D(A(t))$ do operador linear $A(t)$ é independente de t .
- (ii) Para cada $t \geq 0$, o operador linear $A(t) : Y \subset X \rightarrow X$ é gerador de um C_0 -semigrupo $\{S_t(s)\}_{s \geq 0}$ sobre X , e existem constantes $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ independentes de t , tais que

$$\|S_t(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega s}; \forall t, s \geq 0.$$

- (iii) A família $A : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ pertence ao espaço $Lip_*(0, +\infty; \mathcal{L}(Y, X))$. Equivalentemente, temos que $\frac{d}{dt} A(t) \in L_*^\infty(0, +\infty; \mathcal{L}(Y, X))$,

onde $L_*^\infty(0, +\infty; \mathcal{L}(Y, X))$ é o espaço das (classes de) funções essencialmente limitadas e fortemente mensuráveis de $[0, +\infty)$ no conjunto $\mathcal{L}(Y, X)$ dos operadores lineares limitados de Y em X .

O leitor interessado pela definição do espaço $Lip_*(0, +\infty; \mathcal{L}(Y, X))$, bem como na demonstração da equivalência $A \in Lip_*(0, +\infty; \mathcal{L}(Y, X)) \iff \frac{d}{dt} A(t) \in L_*^\infty(0, +\infty; \mathcal{L}(Y, X))$ pode consultar ([KATO, 1985](#)), páginas 7 e 8.

Teorema 2.24

Seja $(\{A(t)\}_{t \geq 0}, X, Y)$ é um *sistema CD de Kato*.

- (i) Se $f \in L^1(0, +\infty; X)$, então para cada $u_0 \in X$, o problema linear não-autônomo (2.16) tem uma única solução branda (mild solution) $u \in C^0([0, +\infty); X)$
- (ii) Se $f \in W^{1,1}((0, +\infty); X)$, então para cada $u_0 \in Y$, a solução u é um solução forte satisfazendo:

$$u \in C^0([0, +\infty); Y) \cap C^1((0, +\infty); X).$$

Demonstração. Ver ([\(KATO, 1985\)](#), p. 11 e [\(PAZY, 1983\)](#), p. 106-107). □

Mais geralmente, tem-se o seguinte resultado:

Teorema 2.25

Seja $f : [0, +\infty) \times X \rightarrow X$ uma função contínua na variável $t \geq 0$ e localmente Lipschitz sobre a variável $u \in X$, uniformemente em t sobre intervalos limitados. Se $(\{A(t)\}_{t \geq 0}, X, Y)$ é um sistema CD de Kato, então para cada $u_0 \in X$, existe um $0 < t_{\max} \leq +\infty$, tal que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u = f(t, u(t)); & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \quad (2.17)$$

admitte uma única solução branda $u \in C([0, +\infty); X)$ sobre $[0, +t_{\max}]$. Além disso, se $t_{\max} < +\infty$, então

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}^-} \|u(t)\| = \infty$$

Demonstração. Ver ((PAZY, 1983), p. 185-186; e (KATO, 1985), p. 11). \square

Teorema 2.26

Seja $(\{A(t)\}_{t \geq 0}, X, Y)$ é um sistema CD de Kato. Suponha que f é Lipschitziana na variável $t \geq 0$, uniformemente para conjuntos limitados de X e localmente Lipschitz sobre a variável $u \in X$, uniforme em conjuntos intervalos limitados $[0, T]$. Se $u_0 \in Y$, então a solução branda (mild solution) do problema (2.17) (ou a solução branda do problema (2.17) sobre $[0, t_{\max}]$) é uma solução forte.

Demonstração. Ver ((PAZY, 1983), p. 185 e p. 189; e (KATO, 1985), p. 11). \square

Corolário 2.27

Seja $(\{A(t)\}_{t \geq 0}, X, Y)$ é um sistema CD de Kato. Se $u_0 \in X$, $f : [0, +\infty) \times X \rightarrow X$ uma função contínua na variável $t \geq 0$ e localmente Lipschitz sobre a variável $u \in X$, uniformemente em t sobre intervalos limitados, e $h \in L_{loc}^1(0, +\infty; X)$, então existe um $0 < t_{\max} \leq +\infty$, tal que o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) - A(t)u + f(t, u(t)) = h(t); & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \quad (2.18)$$

admitte uma única solução branda no intervalo $[0, +t_{\max}]$, de modo que $\lim_{t \rightarrow t_{\max}^-} \|u(t)\| = \infty$, sempre que $t_{\max} < +\infty$.

Além disso, se $u_0 \in Y$, $f : [0, +\infty) \times X \rightarrow X$ é Lipschitziana na variável $t \geq 0$, uniformemente para conjuntos limitados de X e localmente Lipschitz sobre a variável $u \in X$, uniforme em conjuntos intervalos limitados $[0, T]$, e $h \in W_{loc}^{1,1}(0, +\infty; X)$, então a solução branda é uma solução forte sobre $[0, t_{\max}]$.

Demonstração. Basta combinar os Teoremas 2.24, 2.25 e 2.26. \square

Observação 2.28

Os resultados apresentados nesta seção permanecem válidos para o problema de Cauchy com dado inicial em um instante arbitrário $\tau_0 \in \mathbb{R}$, mediante uma modificação mínima na definição de solução branda.

Com efeito, a representação

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s, u(s)) ds, \quad t > 0,$$

corresponde ao caso em que o dado inicial é imposto em $t = 0$, isto é, $u(0) = u_0$.

Por outro lado, se o dado inicial é prescrito em um instante $\tau_0 \in \mathbb{R}$, isto é, $u(\tau_0) = u_{\tau_0}$, então a solução branda é dada por

$$u(t) = S(t-\tau_0)u_{\tau_0} + \int_{\tau_0}^t S(t-s)f(s, u(s)) ds, \quad t \geq \tau_0.$$

2.3 Teoremas de Geração e Estabilidade de Semigrupos

Até o presente momento, desenvolvemos diversos resultados de existência e unicidade para problemas de valor inicial em diferentes contextos e sob distintas hipóteses estruturais. Esses resultados constituem um marco essencial no estudo de equações diferenciais de evolução, pois asseguram que os modelos matemáticos considerados admitem soluções bem definidas e que estas soluções são únicas para cada dado inicial.

Contudo, um aspecto central permeia todos esses resultados: a parte linear do problema, representada por um operador (em geral não limitado) A , deve necessariamente ser o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de operadores lineares. Essa exigência não é apenas técnica, mas estrutural, uma vez que é justamente a teoria de semigrupos que fornece a linguagem e o ferramental para a formulação abstrata e a análise dos problemas de Cauchy. Mesmo em situações não autônomas, a condição não se torna mais flexível: para cada instante $t \geq 0$, o operador $A(t)$ deve ser o gerador de um C_0 -semigrupo.

Diante dessa exigência fundamental, o objetivo desta seção é duplo. Em primeiro lugar, buscamos estabelecer condições necessárias e suficientes para que um operador não limitado A seja, de fato, o gerador de um C_0 -semigrupo. Esse estudo nos conduzirá a resultados clássicos, como os Teoremas de Hille–Yosida e de Lumer–Phillips, que constituem pilares da teoria moderna de semigrupos e oferecem critérios práticos para identificar geradores. Em segundo lugar, voltaremos nossa atenção para a análise da estabilidade de semigrupos de operadores lineares, investigando como as propriedades espectrais e dissipativas do gerador se traduzem no comportamento assintótico das soluções, o que permitirá uma análise abrangente do comportamento assintótico das soluções do problema linear (4.1)–(4.3) proposto no Capítulo 4.

A investigação da estabilidade não é apenas um desdobramento natural da teoria de geração, mas também um elemento crucial para aplicações em modelos físicos, mecânicos e de controle. De fato, compreender se as soluções de um problema de evolução permanecem limitadas, decaem assintoticamente ou ainda em que taxa se dissipam constitui informação fundamental para a interpretação do modelo. Assim, estudaremos diferentes noções de estabilidade (forte, uniforme,

exponencial e polinomial), explorando suas inter-relações e condições de caracterização. Destacaremos ainda resultados de grande relevância, como os Teoremas de Arendt–Batty, Borichev–Tomilov, Batty–Chill–Tomilov e Gearhart, que estabelecem vínculos profundos entre o espectro do gerador A e o decaimento temporal da energia associada ao sistema.

2.3.1 Teoremas de Geração de Semigrupos

Lembre-se de que, se $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear (não necessariamente limitado), o *conjunto resolvente do operador* A é definido como

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A \text{ é invertível e } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}.$$

O conjunto complementar $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ é denominado o *espectro do operador* A . Um ponto $\lambda \in \mathbb{C}$ é chamado de *autovalor* de A , quando o operador $\lambda I - A$ não é injetivo. Neste caso, um elemento não nulo $x \in D(A)$, tal que $Ax = \lambda x$ é chamado de *autovetor* associado ao autovalor λ .

O conjuntos de todos os autovalores de A é denominado o *espectro pontual* de A e é denotado por $\sigma_p(A)$.

Teorema 2.29 (Hille–Yosida)

Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é gerador infinitesimal de um C_0 –semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ se, e somente se,

(i) A é fechado e $D(A)$ é denso em X .

(ii) $\rho(A) \supset (0, +\infty)$ e para todo $\lambda > 0$, tem-se

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$$

Demonstração. Ver ((PAZY, 1983), p. 8). □

A seguir, apresentamos o Teorema de Lummer–Phillips. Esse teorema é uma caracterização mais prática, do ponto de vista operacional, dos geradores infinitesimais dos C_0 –semigrupos de contrações.

Inicialmente, lembre-se de que, se X é um espaço de Banach, para cada $x \in X$, pelo Teorema de Hahn–Banach, existe um funcional linear limitado $L_x \in X'$ tal que

$$\langle L_x, x \rangle = \|x\|_X^2 = \|L_x\|_{X'}^2.$$

Assim, para cada $x \in X$, o *conjunto de dualidade* definido por

$$J(x) = \{L \in X'; \langle L, x \rangle = \|x\|_X^2 = \|L\|_{X'}^2\}$$

é não vazio.

Definição 2.30

Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Dizemos que A é *dissipativo* se, para todo $x \in D(A)$, existe um funcional linear L_x em seu conjunto de dualidade $J(x)$ tal que

$$\operatorname{Re}\langle L_x, Ax \rangle \leq 0.$$

Observe que, no contexto de um espaço de Hilbert H , tem-se $\|\cdot\|_H^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_H$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ é o produto interno de H . Nesse caso, o Teorema da Representação de Riesz garante que é possível identificar H com o seu dual H' , identificando cada $x \in H$ ao funcional $L_x \in H'$.

Assim, se $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ é um espaço de Hilbert, então o conjunto de dualidade (via identificação) é simplesmente $J(x) = \{x\}$ para todo $x \in H$. Como $\langle x, y \rangle_H = \overline{\langle y, x \rangle_H}$; $\forall x, y \in H$, um operador linear $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é *dissipativo* se, e somente se

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x \rangle_H \leq 0; \quad \forall x \in D(A). \quad (2.19)$$

Teorema 2.31 (Lumer-Phillips)

Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear tal que $\overline{D(A)} = X$. Então

- (i) Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que o operador $\lambda_0 I - A$ é sobrejetivo, então A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações sobre X .
- (ii) Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações sobre X , então A é dissipativo e o operador $\lambda I - A$ é sobrejetivo, qualquer que seja $\lambda > 0$.

Demonstração. Ver ((PAZY, 1983), p. 14). □

Definição 2.32

Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear sobre um espaço de Banach X . Dizemos que A é *maximal* se $\lambda_0 I - A$ é sobrejetivo para algum $\lambda_0 > 0$

Proposição 2.33

Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear dissipativo. Se A é maximal, então $\lambda I - A$ é sobrejetivo para todo $\lambda > 0$.

Demonstração. Ver ((PAZY, 1983), p 15-16). □

2.3.2 Teoremas de Estabilidade para Semigrupos

Ao analisar um sistema dinâmico regido por Equações Diferenciais de Evolução, é fundamental compreender o comportamento assintótico de suas soluções e a taxa de decaimento da energia do sistema quando $t \rightarrow \infty$. Para finalizar esta seção, introduziremos as noções de estabilidade do semigrupo que caracteriza o decaimento da norma das soluções, e de estabilidade da energia do sistema, que descreve a dissipação ao longo do tempo da quantidade de energia associada à solução.

Serão apresentadas condições necessárias e suficientes para a estabilidade de um C_0 -semigrupo de operadores lineares, bem como a relação entre o tipo de estabilidade do semigrupo e o comportamento assintótico da energia do sistema. Essa conexão é essencial para traduzir propriedades do gerador infinitesimal, como a localização do espectro, em informações qualitativas sobre a dinâmica do problema de Cauchy associado.

Além disso, enunciaremos resultados importantes que estabelecem equivalências entre diferentes noções de estabilidade para semigrupos e o decaimento exponencial ou polinomial das soluções (ou de sua energia). Tais resultados serão posteriormente aplicados no estudo do comportamento assintótico das soluções do problema (4.1)–(4.3), formulado no Capítulo 4.

Definição 2.34

Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre um espaço de Banach X . A energia da solução $u : [0, +\infty) \rightarrow X$ do problema abstrato de Cauchy (2.6) é definida como

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u(t)\|_X^2 = \frac{1}{2} \|S(t)u_0\|_X^2; \forall t \geq 0. \quad (2.20)$$

Definição 2.35

Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo sobre um espaço de Banach X .

(i) Dizemos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é *fortemente* (ou *assintoticamente*) *estável* quando

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|S(t)x\|_X = 0; \forall x \in X.$$

(ii) Dizemos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é *uniformemente estável* quando

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

(ii') Dizemos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é *exponencialmente estável* quando existem constantes $\omega > 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{-\omega t}; \forall t \geq 0.$$

Proposição 2.36

Um C_0 -semigrupo é exponencialmente estável se, e somente se é uniformemente estável.

Demonstração. Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo sobre um espaço de Banach X . Se $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável, é claro que ele é uniformemente estável. Reciprocamente suponha que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é uniformemente estável. Assim, existe $t_0 > 0$ tal que $q := \|S(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$. Defina $M_0 = \sup_{0 \leq s \leq t_0} \|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}$, que existe, uma vez que a aplicação $t \mapsto \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é contínua e $[0, t_0]$ é compacto. Escrevendo $t = kt_0 + s > 0$, com $k \in \mathbb{N}$ tal que $kt_0 \leq t \leq (k+1)t_0$ e $0 \leq s < t_0$, tem-se

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \|S(kt_0)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_0 \|S(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)}^k \leq M_0 \|S(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)}^k \leq M_0 q^k.$$

Note que $q^k = e^{k \ln q}$. Como $q < 1$, temos $\ln q < 0$, e podemos escrever $q^k = e^{-k|\ln q|}$. Por outro lado, como $t = kt_0 + s$ e $kt_0 \leq t \leq (k+1)t_0$, tem-se que $k \geq t/t_0 - 1$, e portanto

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_0 q^k \leq M_0 e^{-k|\ln q|} \leq M_0 e^{-\left(\frac{t}{t_0} - 1\right)} = M_0 e^{|\ln q|} \cdot e^{-\frac{t}{t_0}|\ln q|} = \frac{M_0}{q} e^{-\frac{t}{t_0}|\ln q|} = M e^{-\omega t},$$

onde $\omega := |\ln q|/t_0$ e $M := (M_0/q) \geq 1$. □

Em termos da Energia $E(t) = \frac{1}{2} \|e^{tA}u_0\|_X^2$ associada ao sistema (2.6), temos as seguintes caracterizações de estabilidade:

- (i) O semigrupo $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ é fortemente (ou assintoticamente) estável, se, e somente se, o sistema (2.6) for *assintoticamente estável*. Em outras palavras, isso ocorre quando:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t) = 0$$

- (ii) O semigrupo $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ é exponencialmente (ou uniformemente) estável, se, e somente se, o sistema (2.6) for *exponencialmente estável*. Neste caso, existem constantes $C > 0$ e $w > 0$ independentes da condição inicial u_0 , tais que:

$$E(t) \leq CE(0)e^{-wt}; \quad \forall t > 0.$$

Há ainda um conceito de estabilidade que é mais abrangente do que a estabilidade assintótica, pois, além de garantir que a energia decai para zero quando $t > 0$ é suficientemente grande, é suficientemente grande, ele descreve a taxa desse decaimento. No entanto, esse decaimento é mais lento do que aquele observado na estabilidade exponencial. Trata-se do conceito de *estabilidade polinomial*, cuja definição, em termos da energia do sistema (2.6), é dada por:

$$E(t) \leq \frac{C}{t^\omega} \|u_0\|_{D(A)}; \quad \forall t > 0,$$

onde C e w são constantes positivas e a norma $\|u_0\|_{D(A)}$ é definida por:

$$\|u_0\|_{D(A)} = \|u_0\|_X + \|Au_0\|_X.$$

Motivados pelo conceito de estabilidade polinomial aplicado ao sistema (2.6), apresentamos a definição equivalente de estabilidade polinomial no contexto de semigrupos:

Definição 2.37

Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre o espaço de Banach X . Dizemos que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é *polinomialmente estável* se existirem constantes $M > 0$ e $\omega > 0$ tais que

$$\|S(t)x\|_X \leq \frac{M}{t^\omega} \|x\|_{D(A)}; \quad \forall x \in D(A) \text{ e } \forall t > 0.$$

Finalmente, no que segue, apresentaremos os resultados de estabilidade que utilizaremos na análise do comportamento assintótico da solução do problema que será estudado no capítulo 3.

Teorema 2.38 (Teorema de Arendt-Batty)

Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo limitado $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre um espaço de Banach reflexivo X . Então $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é fortemente estável se satisfaçõas as seguintes condições:

- (i) O operador A não possui autovalores no eixo imaginário, ou seja $\sigma_p(A) \cap \{\lambda i \in \mathbb{C}; \lambda \in \mathbb{R}\} = \emptyset$.
- (ii) O espectro de A , contém, no máximo uma quantidade enumerável de pontos no eixo imaginário.
Em outras palavras, $\sigma(A) \cap \{\lambda i \in \mathbb{C}; \lambda \in \mathbb{R}\}$ é um conjunto enumerável.

Demonstração. Ver (ARENDT; BATTY, 1988) □

Teorema 2.39 (Teorema de Borichev-Tomilov)

Seja $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo limitado $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre um espaço de Hilbert H tal que $\{i\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \rho(A)$. Então $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é polinomialmente estável, se, e somente se,

$$\limsup_{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\lambda|^{1/\omega}} \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$$

Neste caso, existe uma constante $M > 0$, tal que

$$\|S(t)x\|_H \leq \frac{M}{t^\omega} \|x\|_{D(A)}; \quad \forall x \in D(A) \text{ e } \forall t > 0. \quad (2.21)$$

Demonstração. Ver (BORICHEV; TOMILOV, 2010). □

Teorema 2.40 (Teorema de Batty-Chill-Tomilov)

Seja $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo limitado $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre um espaço de Hilbert H tal que $\sigma(A) \cap \{\lambda i \in \mathbb{C}; \lambda \in \mathbb{R}\} = \{0\}$. Se existem constantes $\sigma \geq 1$ e $\gamma > 0$ tais que

$$\|\lambda i I - A\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \begin{cases} O(|\lambda|^{-\sigma}), & \text{se } |\lambda| \rightarrow 0, \\ O(|\lambda|^\gamma), & \text{se } |\lambda| \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

então, existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$\|S(t)x\|_H \leq \frac{C}{t^{\max\{\sigma, \gamma\}}} \|x\|_{D(A)}; \quad \forall x \in D(A) \cap A(H) \text{ e } t > 0.$$

Demonstração. Ver (BATTY; CHILL; TOMILOV, 2016). □

Teorema 2.41 (Teorema de Gearhart)

Seja $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ o gerador infinitesimal de C_0 -semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre um espaço de Hilbert H . Então $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é exponencialmente estável se, e somente se,

- (i) $\rho(A) \supset \{\lambda i \in \mathbb{C}; \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- (ii) $\limsup_{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty$.

Demonstração. Ver (GEARHART, 1978). □

Uma observação de caráter prático a respeito da segunda condição (ii) da definição de um sistema CD de Kato (ver Definição 2.23) é oportuna.

Observação 2.42

Geralmente nas aplicações, a condição de estabilidade uniforme em t exigida em (ii):

$$\|S_t(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega s}; \forall t, s \geq 0.$$

é difícil de ser verificada diretamente. Então é desejável que existisse um critério prático e suficiente para obter essa condição. Um critério conveniente é que X admita uma norma equivalente $\|\cdot\|_t$ tempo dependente que seja localmente Lipschitziana. Isto é, existe $c > 0$ tal que:

$$\frac{\|x\|_t}{\|x\|_s} \leq e^{c|t-s|}, \text{ para todo } t, s \geq 0 \text{ e para todo } x \neq 0 \text{ em } X,$$

Para mais detalhes, ver (KATO, 1985), página 10.

Capítulo 3

Dinâmica Não Linear Autônoma e Não-Autônoma

O mundo natural é intrinsecamente não linear. Desde sistemas físicos clássicos até modelos mais sofisticados da biologia, da mecânica ou da economia, as equações diferenciais que descrevem tais fenômenos raramente apresentam uma estrutura linear simples. Nesse cenário, a noção de semigrupo, tão poderosa no estudo da dinâmica de sistemas lineares, pode ser magnificamente generalizada para lidar com a evolução temporal de soluções de problemas de Cauchy não lineares autônomos. Essa generalização dá origem à chamada Teoria de Semigrupos Não Lineares de Operadores Contínuos, frequentemente interpretada sob a ótica de Sistemas Dinâmicos Autônomos em dimensão infinita.

A primeira seção deste capítulo será dedicada a essa teoria. Diferentemente do caso linear, onde as soluções tendem a decair para zero (como discutimos na seção final do Capítulo 2, ao abordar a estabilidade de energia e de semigrupos lineares), no contexto não linear as trajetórias podem apresentar comportamentos assintóticos mais ricos. Em vez de convergirem necessariamente para a origem, as soluções podem ser atraídas para um conjunto compacto invariante especial, denominado atrator. Esse conjunto desempenha o papel de descrever, de forma qualitativa e geométrica, o regime permanente das soluções.

No caso puramente linear, o atrator reduz-se a um único ponto: tipicamente a origem do espaço de fases X . Já no cenário não linear, o estudo torna-se substancialmente mais sofisticado, deslocando o foco para a análise de sistemas dinâmicos em dimensão infinita. Conceitos fundamentais como atratores globais emergem, oferecendo uma descrição abrangente do comportamento assintótico. Um atrator global é um conjunto compacto, invariante, que atrai todos os subconjuntos limitados de X . Em outras palavras, independentemente da condição inicial, todas as trajetórias do sistema (soluções) acabam sendo capturadas por esse conjunto, o que proporciona uma caracterização completa do comportamento de longo prazo.

Surpreendentemente, existe uma generalização ainda mais abrangente dessa estrutura. Muitos sistemas físicos, mecânicos e biológicos não são autônomos, ou seja, as leis que os regem variam explicitamente no tempo. Nesses casos, a estrutura de semigrupo, que depende apenas do intervalo

de tempo decorrido ($t - s$), mostra-se insuficiente para descrever adequadamente a dinâmica. Surge então a Teoria de Processos de Evolução, também conhecida como a teoria de Sistemas Dinâmicos Não Autônomos.

Um processo de evolução é uma família de operadores que depende de dois instantes temporais, descrevendo a evolução do sistema desde um instante inicial s até um instante posterior t , refletindo a natureza não estacionária do operador ao longo do tempo. Essa teoria, que apresentaremos na segunda seção deste capítulo, representa o ponto culminante da estruturação hierárquica que parte dos semigrupos lineares, passa pelos semigrupos não lineares e chega aos processos não autônomos.

No âmbito dos sistemas não autônomos, o estudo do comportamento assintótico (dinâmica do sistema) é enriquecido por noções mais sutis, como o conceito de atrator pullback. Em contraste com os atratores globais de sistemas autônomos, que atraem soluções para um conjunto fixo quando $t \rightarrow +\infty$, o atrator pullback incorpora a ideia de puxar soluções a partir de condições iniciais situadas em tempos cada vez mais distantes no passado ($s \rightarrow -\infty$) até o presente t . Dessa forma, ele se adapta dinamicamente às forças externas variantes no tempo, oferecendo uma caracterização mais natural e robusta do regime permanente em sistemas não autônomos.

Assim, este capítulo tem como objetivo complementar e expandir o estudo iniciado no contexto linear. Primeiro, apresentamos a teoria de semigrupos não lineares e o estudo de atratores globais; em seguida, avançamos até a abstração máxima dos processos de evolução não autônomos, culminando na análise sofisticada dos atratores pullback. Essa jornada fornece não apenas técnicas avançadas de análise e resolução, mas também uma visão unificada e profunda da dinâmica de sistemas descritos por equações diferenciais, iluminando os vínculos entre linearidade, não linearidade e dependência temporal explícita.

3.1 Teoria Semigrupos de Operadores não Lineares Contínuos

Nesta seção, estudaremos a teoria de semigrupos de operadores não lineares contínuos, cujo objetivo central é analisar a dinâmica das soluções de problemas de Cauchy não lineares autônomos. Esse arcabouço teórico, também conhecido como teoria de sistemas dinâmicos autônomos em dimensão infinita, amplia de maneira significativa a teoria de semigrupo de operadores lineares limitados desenvolvida no Capítulo 2, permitindo compreender o comportamento de fenômenos mais realistas, nos quais a presença de não linearidades desempenha papel essencial.

Ao contrário do caso linear, em que a análise assintótica das soluções se baseia em critérios espectrais e no estudo da estabilidade de semigrupos, conduzindo, na maioria das vezes, ao decaimento exponencial ou polinomial em direção à origem, no caso não linear, o comportamento de longo prazo das soluções revela uma rica estrutura geométrica. Em particular, as soluções deixam de tender, em geral, a um único ponto (a origem) e passam a ser atraídas por conjuntos compactos

invariantes especiais, denominados atratores.

Mostraremos como a teoria de semigrupos de operadores não lineares caracteriza o comportamento assintótico do sistema. O conceito-chave será o de atrator global, um conjunto compacto, invariante e atrativo que resume o regime permanente do sistema. Esse atrator contém todas as órbitas limite do sistema e fornece uma descrição qualitativa completa da sua dinâmica a longo prazo. A existência de tal atrator frequentemente está vinculada a duas propriedades fundamentais do semigrupo: a dissipatividade (existência de um conjunto absorvente que atrai todas as órbitas limitadas) e a compacidade assintótica. Esta última garante que as órbitas possuem subsequências convergentes para tempos grandes, assegurando a compacidade do atrator.

No caso linear, o atrator global se reduz a um único ponto (tipicamente a origem do espaço de fase X), ou algum compacto contendo a origem, enquanto, no contexto não linear, ele pode apresentar geometria mais complexa, revelando novos padrões de estabilidade e organização do sistema dinâmico. Outra estrutura importante a ser explorada é a dos semigrupos gradientes, que são aqueles munidos de uma função de Lyapunov estrita. Esta função, que decresce ao longo das trajetórias, permite identificar o atrator global como a variedade instável do conjunto dos pontos de equilíbrio, fornecendo uma caracterização precisa de sua geometria e dinâmica.

Além disso, abordaremos a propriedade de quase estabilidade, uma ferramenta poderosa para analisar a dinâmica no atrator. Um semigrupo quase-estável admite estimativas que permitem provar a finitude da dimensão fractal do atrator global e obter ganhos de regularidade para as trajetórias completas contidas nele, indo além da mera existência do objeto atrator.

Os conceitos discutidos nesta seção serão fundamentais para o estudo da dinâmica do sistema (5.3) (5.6), que será desenvolvido no Capítulo 5, especialmente na demonstração da existência de um atrator global para esse problema.

Considere o problema de Cauchy não linear:

$$\begin{cases} u'(t) = F(u(t)); & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde $F: X \rightarrow X$ é um operador contínuo e X é um espaço de Banach.

Suponhamos que o problema (3.1) é *bem colocado*, isto é, que ele admite uma única solução global $u: [0, +\infty) \rightarrow X$. Assim, podemos definir uma coleção $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores contínuos (não necessariamente lineares), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T(t): X &\longrightarrow X \\ u_0 &\longmapsto u(t), \end{aligned}$$

para cada $t \geq 0$.

Observe que:

- (i) $T(0) = I$, onde $I: X \rightarrow X$ é o operador identidade.

- (ii) $T(t+s) = T(t) \circ T(s); \forall t, s \geq 0.$

Com efeito, dado $u_0 \in X$, temos $T(0)u_0 = u(0) = u_0$. Logo $S(0) = I$. Além disso, definindo $v(t) = u(t+s)$, temos que $v'(t) = u'(t+s) = F(u(t+s)) = F(v(t))$ para todo $t > 0$, e $v(0) = u(s) \in X$. Logo:

$$(T(t) \circ T(s))u_0 = T(t)(T(s)u_0) = T(t)u(s) = v(t) = u(t+s) = T(t+s)u_0; \forall t, s \geq 0.$$

Portanto $T(t+s) = T(t) \circ T(s); \forall t, s \geq 0.$

As propriedades (i) e (ii) acima sugerem uma teoria de semigrupos para operadores contínuos relacionados a problemas de Cauchy não lineares. O foco dessa teoria é entender o comportamento do semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ para t suficientemente grande, e consequentemente, a dinâmica da solução $u(t) = T(t)u_0$, para cada $u_0 \in X$.

O comportamento a longo prazo de uma solução é sempre descrito por um *conjunto invariante* $A \subset X$, para o qual a órbita $u(t)$ converge quando $t \rightarrow +\infty$. Mais precisamente:

$$T(t)A = A; \forall t \geq 0 \quad \text{e} \quad \text{distância}(u(t), A) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow +\infty. \quad (3.2)$$

Veremos que para *sistemas dissipativos* existem conjuntos $A \subset X$ satisfazendo (3.2), e fazem parte de um "grande"conjunto compacto e invariante \mathfrak{A} que atrai todas as órbitas. Esse conjunto será chamado de *atrator global* do semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

3.1.1 Semigrupo de Operadores Contínuos Sobre um Espaço Métrico

Definição 3.1

Seja X um espaço métrico. Uma família de operadores contínuos $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ de X sobre X chama-se um *semigrupo* em X se satisfaz as seguinte propriedades:

- (i) $T(0) = I$, onde $I : X \rightarrow X$ é o operador identidade.
- (ii) $T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2); \forall t_1, t_2 \geq 0.$
- (iii) A aplicação

$$\begin{aligned} T : [0, +\infty) \times X &\longrightarrow X \\ (t, x) &\longrightarrow T(t)x, \end{aligned}$$

é contínua.

Semigrupos são também chamados *sistemas dinâmicos autônomos*. Observe que, da condição (ii) da definição de semigrupo, segue que o semigrupo é comutativo com respeito a composição. De fato, dados $t_1, t_2 \geq 0$, temos $T(t_1)T(t_2) = T(t_1 + t_2) = T(t_2 + t_1) = T(t_2)T(t_1)$.

Os operadores $T(t) : X \rightarrow X$ podem não ser injetivos. Quando o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é tal que, para cada $t \geq 0$, o operador $T(t) : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo, então, para cada $t \leq 0$, define-se $U(s) = T(-s)^{-1} : X \rightarrow X$. A família $\{U(s)\}_{s \in \mathbb{R}}$, com

$$\begin{cases} U(s) = T(s), & \text{se } s \geq 0 \\ U(s) = T(-s)^{-1} & \text{se } s < 0 \end{cases},$$

é chamada *grupo* em X .

A *órbita* ou *trajetória* do semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ que começa em $u_0 \in X$ é o conjunto

$$\bigcup_{t \geq 0} T(t)u_0.$$

Do mesmo modo, quando existe, uma órbita ou trajetória que termina em u_0 é um conjunto de pontos

$$\bigcup_{t \geq 0} \{\xi(s)\},$$

onde $\xi : (-\infty, 0] \rightarrow X$ é uma aplicação contínua tal que $\xi(0) = u_0$ e $\xi(t+s) = T(t)\xi(s)$, para todos os números reais s e t tais que $s \leq 0$, $t \geq 0$ e $s+t \leq 0$ (ou de forma equivalente $\xi(t) \in T(-t)^{-1}u_0$; $\forall t \geq 0$).

As órbitas que começam ou terminam em u_0 são também chamadas *órbitas positivas* ou *negativas* através de u_0 . Uma *trajetória completa* (ou *órbita global*) passando por u_0 é a união das órbitas positivas e negativas através de u_0 .

A seguir formalizamos os conceitos discutidos acima.

Definição 3.2

Sejam X um espaço métrico e $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo em X . Uma aplicação $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma *solução global* para $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, quando

$$T(t)\xi(s) = \xi(t+s); \quad \forall t \geq 0 \text{ e } \forall s \in \mathbb{R}.$$

O conjunto imagem $\xi(\mathbb{R}) = \{\xi(s); s \in \mathbb{R}\}$ é chamada *órbita global* ou *órbita completa* da solução global ξ .

Definição 3.3

Sejam X um espaço métrico e $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo em X . Dado um conjunto $B \subset X$ e $t_0 \geq 0$, definimos a *semiórbita positiva* do conjunto B à direita de t_0 relativa ao semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ por:

$$\gamma_{t_0}^+(B) = \{S(t)x; t \geq t_0 \text{ e } x \in B\}.$$

Quando $t_0 = 0$, escrevemos $\gamma_0^+(B)$ simplesmente por $\gamma^+(B)$ e a chamamos apenas de *Semiórbita positiva* do conjunto B relativa ao semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

A seguir definiremos uma classe de subconjuntos do *espaço de fase* X que preservam a dinâmica do semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

Definição 3.4

Sejam X um espaço métrico e $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo em X . Um subconjunto $A \subset X$ é dito *invariante* pelo semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ quando

$$T(t)A := \{T(t)x; x \in A\} = A; \forall t \geq 0.$$

Quando temos apenas $T(t)A \subset A; \forall t \geq 0$, dizemos que o conjunto A é *positivamente invariante* por $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. O conjunto A é dito *negativamente invariante* por $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ quando $T(t)A \supset A; \forall t \geq 0$.

Proposição 3.5

A união de qualquer família de conjuntos invariantes por um semigrupo é também um conjunto invariante por esse semigrupo.

Demonstração. Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço métrico X e $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família arbitrária de conjuntos invariantes pelo semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Considere o conjunto $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Então

$$T(t)A = T(t) \left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in L} T(t)A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = A; \forall t \geq 0.$$

□

A interseção de conjuntos invariantes não é necessariamente um conjunto invariante. Contudo, observe que, se $T(t) : X \rightarrow X$ é injetivo para todo $t \geq 0$, então a interseção arbitrária de conjuntos invariantes é também um conjunto invariante. Portanto em um grupo de operadores contínuos essa propriedade é válida.

As órbitas globais de um semigrupo são conjuntos invariantes e as soluções globais são aplicações contínuas, como veremos a seguir.

Proposição 3.6

Toda órbita global de um semigrupo é um conjunto invariante para esse semigrupo.

Demonstração. Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço métrico X e $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma solução global para $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Queremos mostrar que $T(t)\xi(\mathbb{R}) = \xi(\mathbb{R}); \forall t \geq 0$. Para tal, seja $t \geq 0$.

Se $u \in T(t)\xi(\mathbb{R})$, então $u = T(t)x$ para algum $x = \xi(s_0)$, com $s_0 \in \mathbb{R}$. Assim

$$u = T(t)x = T(t)\xi(s_0) = \xi(t + s_0) \in \xi(\mathbb{R}).$$

Logo $T(t)\xi(\mathbb{R}) \subset \xi(\mathbb{R})$.

Reciprocamente, se $u \in \xi(\mathbb{R})$, então $u = \xi(s_0)$ para algum $s_0 \in \mathbb{R}$. Escolha o ponto $x = \xi(s_0 - t) \in \xi(\mathbb{R})$. Observe que:

$$T(t)x = T(t)\xi(s_0 - t) = \xi(t + s_0 - t) = \xi(s_0) = u.$$

Logo $u \in T(t)\xi(\mathbb{R})$. Portanto $\xi(\mathbb{R}) \subset T(t)\xi(\mathbb{R})$, o que completa a prova. □

Proposição 3.7

Toda solução global de um semigrupo é uma aplicação contínua.

Demonstração. Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço métrico (X, d) e $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma solução global para $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Do item (iii) da definição de semigrupo, dado $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in X$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(T(t)x, T(t_0)x_0) \leq \varepsilon, \text{ sempre que } (t, x) \in [0, +\infty) \times X \text{ e } |t - t_0| + d(x, x_0) < \delta. \quad (3.3)$$

Assim, dado $s_0 \in \mathbb{R}$, fixe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \delta < s_0 - \tau$. Se $s \in \mathbb{R}$ é tal que $|s - s_0| < \delta$, então $s - \tau, s_0 - \tau > 0$. Definindo $t = s - \tau$, $t_0 = s_0 - \tau$ e $x_0 = \xi(\tau)$, temos que:

$$|s - s_0| = |t + \tau - t_0 - \tau| = |t - t_0| = |t - t_0| + d(x_0, x_0) < \delta.$$

Então, de (3.3) segue que

$$\begin{aligned} d(\xi(s), \xi(s_0)) &= d(\xi(s - \tau + \tau), \xi(s_0 - \tau + \tau)) = d(T(s - \tau)\xi(\tau), T(s_0 - \tau)\xi(\tau)) \\ &= d(T(t)x_0, T(t)x_0) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ é contínua, como queríamos provar. \square

Os conceitos de conjunto invariante e de solução global estão conectados por meio do próximo resultado.

Teorema 3.8

Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço métrico X . Um subconjunto $A \subset X$ é invariante pelo semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, se e somente se é uma reunião de órbitas globais de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

Demonstração. Como vimos na Proposição 3.6, toda órbita global é um conjunto invariante. Então, se A é uma reunião de órbitas globais, então segundo a Proposição 3.5, A é invariante.

Reciprocamente, suponhamos que A seja um conjunto invariante. Considere qualquer ponto $x_0 \in A$. Como A é invariante, temos que $T(t)x_0 \in A$ para todo $t \geq 0$. Além disso (ainda pela invariância de A), existe um ponto $x_{-1} \in A$ tal que $x_0 = T(1)x_{-1}$. Analogamente, existe um ponto $x_{-2} \in A$ tal que $x_{-1} = T(1)x_{-2}$. Continuando o processo indutivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos um ponto $x_{-n} \in A$ tal que $x_{-n+1} = T(1)x_{-n}$. Portanto $T(n)x_{-n} = x_0$. Mais geralmente, por indução segue que:

$$T(n)x_m = x_{n-m}, \text{ sempre que } m \geq n.$$

Agora, defina $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ por:

$$\xi(s) := \begin{cases} T(s)x_0, & \text{se } s \geq 0 \\ T(s+n)x_{-n} & \text{se } -n \leq s < 1-n \end{cases},$$

Por construção, temos $\xi(s) \in A$ para cada $s \in \mathbb{R}$. Assim, resta apenas mostrar que ξ é uma solução global para $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

Sejam $t \geq 0$ e $s \in \mathbb{R}$. Se $s \geq 0$, então

$$T(t)\xi(s) = T(t)T(s)x_0 = T(t+s) = \xi(t+s), \text{ pois } t+s \geq 0.$$

No caso em que $s < 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $-n_0 \leq s < 1 - n_0$. Note que $t+s \geq 0$ ou $t+s < 0$. No primeiro caso, temos:

$$T(t)\xi(s) = T(t)T(s+n_0)x_{-n_0} = T([t+s]+n_0)x_{-n} = T(t+s)T(n_0)x_{-n_0} = T(t+s)x_0 = \xi(t+s).$$

Finalmente, no caso em que $s < 0$ e $t+s < 0$, considere $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 \leq t+s < 1 - n_1$. Como $s < t+s$, temos que $n_1 \leq n_0$. Então

$$\begin{aligned} T(t)\xi(s) = T(t)T(s+n_0)x_{-n_0} &= T(t+[s+n_0])x_{-n_0} &= T([t+s+n_1]+[n_0-n_1])x_{-n_0} \\ &= T(t+s+n_1)T(n_0-n_1)x_{-n_0} \\ &= T(t+s+n_1)x_{-n_1} \\ &= \xi(t+s). \end{aligned}$$

Portanto $T(t)\xi(s) = \xi(t+s)$; $\forall t \geq 0$ e $\forall s \in \mathbb{R}$. Logo ξ é uma solução global para o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, o que completa a prova. \square

Quando se deseja estudar o comportamento assintótico dos sistemas dinâmicos, uma ferramenta bastante útil é a *semidistância de Hausdorff*, a qual será a “medida” responsável por descrever a noção de proximidade entre os objetos relacionados à dinâmica do sistema.

Definição 3.9

Seja (X, d) um espaço métrico. Dados dois conjuntos não vazios $A, B \subset X$, definimos a *semidistância de Hausdorff* entre A e B (nessa ordem) por:

$$dist_X(A, B) := \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Um fato que faz da semidistância de Hausdorff uma ferramenta útil nesta teoria é que ela satisfaz a desigualdade triangular. Contudo, ela não é simétrica. Além disso $dist(A, B) = 0$ se, e somente se, $A \subset \overline{B}$. Assim por meio dessa semidistância é possível definir uma boa noção de atração em um semigrupo.

Para mais detalhes sobre a semidistância de Hausdorff, vide ([FEDERER, 1969](#)).

Definição 3.10

Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço métrico (X, d) e sejam $A, B \subset X$. Diz-se que o conjunto A atraí B (ou que B é atraído por A) por meio (ou ação) do semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ quando

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} dist_X(T(t)B, A) = 0.$$

Mais precisamente, dado $\varepsilon > 0$ existe $t_0 > 0$ (que depende de ε e de B) tal que:

$$T(t)B \subset \mathbf{V}_\varepsilon(A) := \bigcup_{x \in A} B_\varepsilon(x) = \{x \in X; d(x, A) < \varepsilon\}; \quad \forall t > t_0. \quad (3.4)$$

Um conjunto $A \subset X$ é dito *atrativo* se atrai todos os subconjuntos limitados de X .

No que segue definimos o conceito mais importante desta seção.

Definição 3.11

Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço métrico X . Um subconjunto $\mathfrak{A} \subset X$ chama-se um *atrator global* (ou simplesmente *atrator*) para o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ se satisfaz as seguintes condições:

- (i) \mathfrak{A} é um subconjunto compacto de X .
- (ii) \mathfrak{A} é invariante pelo semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.
- (iii) \mathfrak{A} atrai todos os subconjuntos limitados de X pela ação do semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

Proposição 3.12

Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço métrico X . Se existir um atrator global \mathfrak{A} para $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, então ele é único.

Demonstração. Sejam \mathfrak{A}_1 e \mathfrak{A}_2 dois atratores para $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Da condição (i) da definição de atrator, segue que \mathfrak{A}_2 é compacto (em particular é limitado). Como \mathfrak{A}_1 é atrator, da condição (iii), temos que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}_x(T(t)\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1) = 0.$$

Contudo, \mathfrak{A}_2 é invariante (condição (iii)). Logo

$$0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}_x(T(t)\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}_x(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1) = \text{dist}_x(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_1).$$

Portanto $\mathfrak{A}_2 \subset \overline{\mathfrak{A}_1} = \mathfrak{A}_1$, uma vez que \mathfrak{A}_1 é fechado, pois é compacto.

De forma análoga, invertendo os papéis de \mathfrak{A}_1 e \mathfrak{A}_2 no argumento anterior, conclui-se que $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}_2$, o que completa a prova. \square

Proposição 3.13

Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço métrico X . Se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ possui atrator global \mathfrak{A} , então \mathfrak{A} se exprime como a reunião de todos os conjuntos invariantes e limitados de X .

Demonstração. Seja \mathfrak{B} a reunião de todos os conjuntos invariantes por $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ e limitados em X . Como \mathfrak{A} é atrator, em particular é invariante e limitado, temos $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}$. Reciprocamente, seja $B \subset X$ um conjunto invariante e limitado. Como \mathfrak{A} é o atrator global, então \mathfrak{A} atrai B . Então

$$0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}_X(T(t)B, \mathfrak{A}) = \text{dist}_X(B, \mathfrak{A}).$$

Logo $B \subset \overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$, e portanto $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, como queríamos mostrar. \square

Corolário 3.14

Se um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em um espaço métrico X possui atrator global \mathfrak{A} , então \mathfrak{A} é a reunião de todas as órbitas globais limitadas de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

Demonstração. Basta combinar o Teorema 3.8 com a Proposição 3.13. □

Definição 3.15

Sejam X um espaço métrico e $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo em X .

- (i) $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ diz-se *limitado*, quando a semiórbita positiva de qualquer subconjunto limitado de X é um limitado de X .
- (ii) $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ diz-se *eventualmente limitado*, quando para cada subconjunto limitado de $B \subset X$, existe $t_0 \geq 0$ (dependendo do conjunto B) tal que $\gamma_{t_0}^+(B)$ é um conjunto limitado em X .

Observamos que, se um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sobre um espaço métrico X admite atrator \mathfrak{A} , então ele é eventualmente limitado. De fato, dado o conjunto limitado $B \subset X$, temos que \mathfrak{A} atrai B , e portanto, tomando $\varepsilon = 1$ em (3.4), temos que $\gamma_{t_0}^+(B) \subset \mathbf{V}_1(\mathfrak{A})$. Como $\mathbf{V}_1(\mathfrak{A})$ é limitado em X , segue que $\gamma_{t_0}^+(B)$ também o é. Em particular, se $\xi: \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma solução global para $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, então para todo número real t , o conjunto $\{\xi(s); s \geq t\}$ é limitado.

3.1.2 Conjuntos ω -limites e Existência de Atrator Global

O objetivo desta subseção é obter condições suficientes e práticas do ponto de vista analítico para existência de atrator global para um semigrupo. Começaremos definindo o conceito fundamental para esse objetivo.

Definiremos agora o conceito de conjunto ω -limite que a peça fundamental do atrator global de um semigrupo.

Definição 3.16

Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço métrico X e $B \subset X$. O conjunto ω -limite de B com respeito ao semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é definido por:

$$\omega(B) = \bigcap_{t \geq 0} \left(\overline{\bigcup_{\tau \geq t} T(\tau)B} \right) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\gamma_t^+(B)}.$$

Lema 3.17

Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço métrico X e $B \subset X$. Então $\omega(B)$ é fechado e $x \in \omega(B)$ se, e somente se, existem sequências $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $[0, +\infty)$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X tais que

$$t_n \rightarrow +\infty, \quad x_n \in B; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad x = \lim_{n \rightarrow \infty} T(t_n)x_n.$$

Demonstração. (Ver (ROBINSON, 2001), p. 265). □

Teorema 3.18

Sejam X um espaço métrico e $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo em X . O semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ admite um atrator global \mathfrak{A} se, e somente se, existe um conjunto compacto atrativo K . Nesse caso, $\mathfrak{A} = \omega(K)$.

Demonstração. (Ver (ROBINSON, 2011), p. 117). □

Apresentamos agora, uma caracterização alternativa e mais analítica dos atratores em termos de órbitas limitadas globais. Isso mostra que, embora esses objetos tenham uma definição em termos de dinâmica, eles são de interesse do ponto de vista das Equações Diferenciais.

Corolário 3.19

O atrator global \mathfrak{A} de um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sobre um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$, quando existe, é dado por:

$\mathfrak{A} = \{u_0 \in X; \text{ existe uma solução global } \xi : \mathbb{R} \rightarrow X, \text{ com } \xi(0) = u_0 \text{ tal que } \|\xi(s)\| \leq N; \forall s \in \mathbb{R},$
 para algum $M > 0\}$.

Demonstração. (Ver (ROBINSON, 2011), p. 118). □

Observe que para $u_0 \in X$, a única solução global do problema de (não linear) de Cauchy (3.1) é dada por $u = \xi|_{[0, +\infty)} : [0, +\infty) \rightarrow X$.

Definiremos agora a noção mais forte e mais prática do que o conceito de atração.

Definição 3.20

Sejam X um espaço métrico, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo em X e A e B dois subconjuntos de X . Dizemos que A absorve o conjunto B pela ação do semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, quando existe $t_0 \geq 0$ (dependente de B) tal que

$$T(t)B \subset A, \text{ sempre que } t \geq t_0.$$

Um conjunto $A \subset X$ que absorve todos os subconjuntos limitados de X é chamado *conjunto absorvente*. Note que, todo conjunto absorvente é um conjunto atrativo.

Definição 3.21

Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço métrico X . Dizemos que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é *limitado dissipativo* ou simplesmente *dissipativo*, quando existe um subconjunto limitado B de X que atrai cada um dos subconjuntos limitados de X sob a ação de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

Corolário 3.22

Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo limitado dissipativo sobre um espaço métrico X . Se o conjunto absorvente B é compacto, então o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ admite (um único) atrator global dado por:

$$\mathfrak{A} = \omega(B).$$

Demonstração. (Ver (ROBINSON, 2001), p. 269). □

É importante observar que nem sempre é prático do ponto de vista das aplicações encontrar conjuntos compactos. Contudo, existe uma noção de compacidade mais computacional (analítica) para um semigrupo, que também garante a existência de atrator. A saber, a de *compacidade assintótica*.

Definição 3.23

Dizemos que um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sobre um espaço métrico X é *assintoticamente compacto* quando para todo sequência limitada $(x_n)_{\mathbb{N}}$ em X e toda sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais não negativos, com $t_n \rightarrow +\infty$, a sequência $(T(t_n)x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X possui uma subsequência convergente.

Teorema 3.24

Sejam X um espaço métrico completo e $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo sobre X . Se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é limitado dissipativo e assintoticamente compacto, então $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ admite um único atrator global \mathfrak{A} dado por

$$\mathfrak{A} = \omega(B),$$

onde B é qualquer conjunto limitado atrativo.

Demonstração. (Ver (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2013), p. 34). □

Finalizaremos a seção apresentando uma condição suficiente e analítica para compacidade assintótica de um semigrupo.

Definição 3.25

Sejam (X, d) um espaço métrico e $B \subset X$ um conjunto limitado. Um aplicação $f : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ é dita *contrativa* sobre $B \times B$ se para qualquer sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$, temos:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \limsup_{m \rightarrow \infty} f(x_n, x_m) = 0.$$

Proposição 3.26

Sejam $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço métrico completo (X, d) e $B \subset X$ um conjunto absorvente. Se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número real positivo $t^* > 0$ (dependente de B e de ε) e uma função contrativa $f_{t^*} : B \times B \subset X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ sobre $B \times B$ tal que:

$$d(T(t^*)x_1, T(t^*)x_2) \leq \varepsilon + f_{t^*}(x_1, x_2); \quad \forall x_1, x_2 \in B,$$

então o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é compactamente assintótico em X .

Demonstração. (Ver (CHUESHOV; LASIECKA, 2008), Proposição 2.10). □

3.1.3 Semigrupo Gradiente e Função de Lyapunov

Definição 3.27

Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ uma semigrupo de operadores contínuos sobre um espaço métrico X e seja $Y \subset X$ um conjunto positivamente invariante por $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Um funcional contínuo $\Phi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ é chamado *função de Lyapunov* para $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sobre Y se a aplicação $t \mapsto \Phi(T(t)y)$ é não crescente, qualquer que seja para cada $y \in Y$.

Se $\Phi(T(t)y) = \Phi(y)$ para todo $t > 0$ e algum $y \in Y$, então y é um ponto fixo de $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ (isto é, $S(t)y = y; \forall t > 0$), dizemos que a função de Lyapunov Φ é *estrita* sobre Y .

Um *semigrupo gradiente* ($\{T(t)\}_{t \geq 0}, \Phi$) é um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ munido de uma função de Lyapunov $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ estrita sobre o espaço de fase X .

Teorema 3.28

Seja $(\{T(t)\}_{t \geq 0}, \Phi)$ um semigrupo gradiente e assintoticamente suave sobre um espaço de Banach X . Suponha que

- (i) A função de Lyapunov $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada por cima sobre qualquer subconjunto limitado de X .
- (ii) O conjunto $\Phi_R = \{x \in X; \Phi(x) < R\}$ é limitado, qualquer que seja $R > 0$.
- (iii) O conjunto dos pontos fixos (ou estacionários) $\mathcal{N} = \{x \in X / T(t)x = x; \forall t > 0\}$ é limitado.

Então o semigrupo $(\{T(t)\}_{t \geq 0}, \Phi)$ admite um atrator global dado por $\mathfrak{A} = \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$, onde $\mathcal{M}^u(\mathcal{N})$ é a variedade não estável proveniente de \mathcal{N} como o conjunto de todos os $x \in X$ tal que existe uma trajetória completa $\gamma = \{u(s); s \in \mathbb{R}\}$ satisfazendo:

$$u(0) = x \text{ e } \lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}_X(u(s), \mathcal{N}) = 0.$$

Demonstração. (Ver (CHUESHOV; LASIECKA, 2010), Corolário 7.5.7). □

Definição 3.29 (Quase estabilidade)

Sejam X , Y e Z espaços de Banach Reflexivos tais que $X \xrightarrow{\text{comp}} Y$. Considere o espaço $H = X \times Y \times Z$ munido da norma definida por:

$$\|y\|_H^2 = \|u_0\|_X^2 + \|u_1\|_Y^2 + \|\theta_0\|_Z^2; \quad y = (u_0, u_1, \theta_0). \quad (3.5)$$

Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de operadores contínuos sobre H com operador de evolução da forma:

$$T(t)y = (u(t), u_t(t), \theta(t)); \quad y = (u_0, u_1, \theta_0) \in H \quad (3.6)$$

satisfazendo:

$$\begin{cases} u \in C^0([0, +\infty); X) \cap C^1([0, +\infty); Y), \\ \theta \in C^0([0, +\infty); Z). \end{cases} \quad (3.7)$$

Dizemos que o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é *assintoticamente quase-estável* sobre um conjunto $B \subset H$ se existe uma seminorma compacta $\mu_X(\cdot)$ sobre o espaço X e funções $a, b, c : [0, t) \rightarrow \mathbb{R}$ não negativas tais que:

(i) a e c são localmente limitadas.

(ii) $b \in L^1(0, +\infty)$ e $\lim_{t \rightarrow +\infty} b(t) = 0$.

(iii) Para todo $y_1, y_2 \in B$ e $t > 0$, tem-se

$$\|T(t)y_1 - T(t)y_2\|_H^2 \leq a(t)\|y_1 - y_2\|_H^2$$

e

$$\|T(t)y_1 - T(t)y_2\|_H \leq b(t)\|y_1 - y_2\|_H + c(t) \cdot \sup_{0 \leq s \leq t} [\mu_X(u^1(s) - u^2(s))]^2,$$

onde $T(t)y_j = (u^j(t), u_t^j(t), \theta^j(t))$.

Teorema 3.30

Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de operadores sobre o espaço $H = X \times Y \times Z$, onde X, Y, Z são espaços de Banach Reflexivos e $X \xrightarrow{\text{comp}} Y$. suponha que as condições (3.5)–(3.7) são satisfeitas. Se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ admite um atrator global \mathfrak{A} e é quase-estável sobre \mathfrak{A} , então o atrator \mathfrak{A} tem dimensão fractal finita.

Demonstração. (Ver (CHUESHOV; LASIECKA, 2010), Teorema 7.9.6). □

Teorema 3.31

Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo de operadores sobre o espaço $H = X \times Y \times Z$, onde X, Y, Z são espaços de Banach Reflexivos e $X \xrightarrow{\text{comp}} Y$. suponha que as condições (3.5)–(3.7) são satisfeitas. Se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ admite um atrator global \mathfrak{A} e é quase-estável sobre \mathfrak{A} e $c_\infty := \sup_{t \geq 0} c(t) < \infty$ (ver Definição 3.29), então qualquer trajetória completa $\{(u(s), u_s(s), \theta(s)); s \in \mathbb{R}\}$ que pertence ao atrator global satisfaz as seguintes propriedades de regularidade:

$$\begin{cases} u_s \in L^\infty(\mathbb{R}; X) \cap C^0(\mathbb{R}; Y) \\ u_{ss} \in L^\infty(\mathbb{R}; Y) \\ \theta_s \in L^\infty(\mathbb{R}; Z) \end{cases} \quad (3.8)$$

Além disso, existe $R > 0$ tal que:

$$\|u_s(s)\|_X^2 + \|u_{ss}(s)\|_Y^2 + \|\theta_s(s)\|_Z^2 \leq R; \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

onde R depende da constante C_∞ , da seminorma μ_X na Definição 3.29, e também das propriedades de imersão de X e Y .

Demonstração. (Ver (CHUESHOV; LASIECKA, 2010), Teorema 7.9.8). □

3.2 Teoria de Processos de Evolução

Nesta seção, desenvolveremos a teoria de processos de evolução, cujo objetivo central é analisar a dinâmica de problemas de Cauchy não autônomos, isto é, problemas em que o operador responsável pela evolução do sistema depende explicitamente do tempo. Esse arcabouço teórico, também conhecido como teoria de sistemas dinâmicos não autônomos em dimensão infinita, amplia de maneira decisiva a teoria de semigrupos estudada anteriormente, permitindo a compreensão de fenômenos mais realistas, nos quais as leis que regem a dinâmica do sistema não permanecem invariantes no tempo.

Ao contrário do caso autônomo, no qual a evolução temporal pode ser descrita por um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, dependendo apenas do intervalo de tempo decorrido $(t - s)$, no cenário não autônomo tal estrutura se mostra insuficiente, pois a dinâmica passa a depender de dois instantes de tempo distintos: o inicial s e o final t . Para lidar com essa complexidade, introduziremos o conceito de processo de evolução, isto é, uma família de operadores $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ que generaliza a noção de semigrupo e captura a dependência explícita do tempo.

Mostraremos como essa teoria descreve de maneira qualitativa a dinâmica pullback de sistemas não autônomos, sendo que o conceito de atrator pullback desempenha, no contexto não autônomo, papel análogo ao do atrator global em sistemas autônomos. Enquanto o atrator global captura o regime permanente quando $t \rightarrow +\infty$, o atrator pullback reflete a influência de condições iniciais vindas do passado remoto ($s \rightarrow -\infty$), adaptando-se dinamicamente às variações externas no tempo e fornecendo uma caracterização robusta do comportamento de longo prazo.

Desenvolveremos condições para a existência de atratores pullback, destacando o papel crucial da dissipatividade pullback (existência de uma família de conjuntos absorventes) e da compacidade assintótica pullback, que garante a convergência de subsequências para tempos iniciais tendendo a $-\infty$. Exploraremos também a noção de conjuntos ω -limite pullback, que constituem a base para a construção do atrator.

Um aspecto fundamental desta teoria é a generalização proporcionada pelo conceito de universo de subconjuntos \mathcal{D} , que permite definir atratores pullback com bacias de atração mais amplas. Essa abordagem nos permitirá estudar a atração de famílias de conjuntos dependentes do tempo, indo além da atração de conjuntos limitados fixos. Apresentaremos resultados sobre \mathcal{D} -atratores pullback, incluindo condições suficientes para sua existência baseadas na \mathcal{D} -compacidade assintótica pullback.

Os conceitos abordados nesta seção serão fundamentais para estudar a dinâmica pullback do sistema (6.2)–(6.6), que será tratado no Capítulo 6, especialmente na demonstração da existência de um \mathcal{D} -atrator pullback para esse problema.

Considere o problema de Cauchy não linear e não autônomo:

$$\begin{cases} u'(t) = F(t, u(t)); & t > \tau \\ u(\tau) = u_\tau \end{cases}, \quad (3.9)$$

onde $F: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua e X é um espaço de Banach.

Suponhamos que o problema (3.9) seja *bem colocado*, isto é, para cada $\tau \in \mathbb{R}$ e $u_\tau \in X$, ele admite uma única solução global $u: [\tau, +\infty) \rightarrow X$. Dessa forma, podemos definir uma família de operadores contínuos (não necessariamente lineares) $\{P(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P(t, \tau): X &\longrightarrow X \\ u_\tau &\longmapsto u(t), \end{aligned}$$

para cada $t \geq \tau$.

Observe que:

(i) $P(\tau, \tau) = I$; $\forall \tau \in \mathbb{R}$, onde $I: X \rightarrow X$ é o operador identidade.

(ii) $P(t, \tau) = P(t, s) \circ P(s, \tau)$; $\forall t \geq s \geq \tau$.

Com efeito, dado $u_\tau \in X$, temos $P(\tau, \tau)u_\tau = u(\tau) = u_\tau$, logo $P(\tau, \tau) = I$. Além disso, se $v(t) = P(t, s)u_s$ e $u_s = P(s, \tau)u_\tau$, então $v(t)$ resolve:

$$\begin{cases} v'(t) = F(t, v(t)); & t > s \\ v(s) = u_s \end{cases}.$$

Como $u(s) = P(s, \tau)u_\tau = u_s$, a unicidade da solução implica que $v(t) = u(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, com $t \geq s \geq \tau$. Assim:

$$P(t, s) \circ P(s, \tau)u_\tau = P(t, \tau)u_\tau; \quad \forall u_\tau \in X.$$

Portanto $P(t, s) \circ P(s, \tau) = P(t, \tau)$; $\forall t \geq s \geq \tau$.

Essas propriedades caracterizam um *processo evolutivo* (ou *sistema de evolução*), que generaliza a noção de semigrupo para o caso não autônomo. O objetivo dessa teoria é estudar o comportamento assintótico das soluções $u(t) = P(t, \tau)x_\tau$, quando $t \rightarrow \infty$, analisando a dinâmica do sistema em relação a conjuntos invariantes.

Em sistemas não autônomos, o comportamento de longo prazo é frequentemente descrito por uma família $\{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de subconjuntos de X pullback invariantes, isto é:

$$P(t, \tau)\mathcal{A}(\tau) = \mathcal{A}(t); \quad \forall t \geq \tau, \quad (3.10)$$

que atrai as órbitas no sentido pullback:

$$distância(u(t), A(t)) \rightarrow 0, \text{ quando } \tau \rightarrow -\infty; \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

Para sistemas dissipativos não autônomos, existe frequentemente um atrator pullback $\mathfrak{A}(t)$, que é compacto, invariante e atrai todas as soluções uniformemente em certas classes de funções. Esse conceito generaliza o atrator global do caso autônomo e desempenha um papel central na análise da dinâmica assintótica de sistemas dependentes do tempo.

Neste contexto, estudaremos as propriedades do processo evolutivo $\{P(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$, a existência e estrutura de atratores pullback, e suas implicações na dinâmica não autônoma.

3.2.1 Processos de Evolução

Definição 3.32

Seja (X, d) um espaço métrico. Um *Processo de Evolução* em X é uma família $\{P(t, s); t \geq s\}$ de operadores contínuos $P(t, s) : X \rightarrow X$, satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) $P(t, t) = I$; $\forall t \in \mathbb{R}$, onde $I : X \rightarrow X$ é o operador identidade.
- (ii) $P(t, s) = P(t, \tau)P(\tau, s)$; $\forall t \geq \tau \geq s$.
- (iii) A aplicação $P : \Delta \times X \rightarrow X$ dado por $P(t, s)x$ é contínua, em que $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2; t \geq s\}$.

É comum denotar um processo evolutivo simplesmente por $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$. Processos evolutivos são também chamados *sistemas dinâmicos não-autônomos*. Essa nomenclatura tem relação com os semigrupos que são comumente chamados de sistemas dinâmicos autônomos. No que segue exploraremos a relação entre processos e semigrupos.

Observe que, a partir de um semigrupo de operadores contínuos $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ (ver Definição 3.1), pode-se definir um processo evolutivo correspondente, fazendo $P_T(t, s) := T(t - s)$. De fato:

- (i) $P_T(t, t) = T(t - t) = T(0) = I$.
- (ii) $P_T(t, \tau)P_T(\tau, s) = T(t - \tau)T(\tau - s) = T((t - \tau) + (\tau - s)) = T(t - s) = P_T(t, s)$; $\forall t \geq \tau \geq s$.
- (iii) Sejam $(t_0, s_0, x_0) \in \Delta \times X$ e $(t_n, s_n, x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\Delta \times X$ tal que $(t_n, s_n, x_n) \rightarrow (t_0, s_0, x_0)$. Então:

$$d(P_T(t_n, s_n)x_n, P_T(t_0 - s_0)x_0) = d(T(t_n - s_n)x_n, T(t_0 - s_0)x_0) \rightarrow 0.$$

Reciprocamente, a partir de um *processo evolutivo tempo-independente*, isto é um processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ que satisfaz a condição:

$$P(t, s) = P(t - s, 0); \quad \forall t \geq s,$$

é possível definir uma semigrupo, fazendo $T_P(t) := P(t, 0)$. De fato:

- (i) $T_P(0) = P(0, 0) = I$.

- (ii) Da condição de independência temporal, tem-se $P(t, s) = P(t - s, 0) = P(t + h - (s + h), 0) = P(t + h, s + h)$ para todo $h \in \mathbb{R}$ e $t \geq s$. Então

$$\begin{aligned} T_P(r_1 + r_2) = P(r_1 + r_2, 0) &= P(r_1 + r_2, r_2)P(r_2, 0) = P(r_1 + r_2 - r_2, 0)P(r_2, 0) \\ &= P(r_1, 0)P(r_2, 0) \\ &= T_P(r_1)T_P(r_2); \forall r_1, r_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- (iii) Sejam $(t_0, x_0) \in [0, +\infty) \times X$ e $(t_n, x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $[0, +\infty) \times X$ tal que $(t_n, x_n) \rightarrow (t_0, x_0)$. Então:

$$d(T_P(t_n)x_n, T_P(t_0)x_0) = d(P(t_n, 0)x_n, P(t_0, 0)x_0) \rightarrow 0.$$

Definição 3.33

Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo sob um espaço métrico X . O processo de evolução $\{P_T(t, s)\}_{t \geq s}$, definido por $P_T(t, s) = T(t - s)$ é chamado de *processo induzido* pelo semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.

Observação 3.34

No inicio da primeira seção deste capítulo apresentamos o sistema CD de Kato, que garantia solução para o problema de Cauchy não-autônomo. (ver Definição 2.23). O sistema CD de Kato pode ser definido em um domínio triângular:

$$\Delta = \{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2; t \geq \tau\}.$$

Nesse caso, uma tripla $(\{A(t)\}_{t \geq \tau}, X, Y)$ é um *sistema CD de Kato*, se X e Y são espaços de Banach separáveis, com $Y \subset X$ e para cada $t \geq \tau$, $A(t) : D(A(t)) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear, e satisfaz as seguintes condições:

- (i) Y está imerso continuamente e é denso em X e $D(A(t)) = Y$ para todo $t \geq \tau$. Em particular, o domínio $D(A(t))$ do operador linear $A(t)$ é independente de t .
- (ii) Para cada $t \geq \tau$, o operador linear $A(t) : Y \subset X \rightarrow X$ é gerador de um C_0 -semigrupo $\{S_t(s)\}_{s \geq \tau}$ sobre X , e existem constantes $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ independentes de t , tais que

$$\|S_t(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega s}; \forall t, s \geq \tau. \quad (3.12)$$

- (iii) A família $A : [\tau, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$ pertence ao espaço $Lip_*(\tau, +\infty; \mathcal{L}(Y, X))$. Equivalentemente, temos que $\frac{d}{dt} A(t) \in L_*^\infty(\tau, +\infty; \mathcal{L}(Y, X))$,

Como foi observado na Observação 2.42, a condição (3.12) é difícil de ser verificada diretamente. Então é desejável que existisse um critério prático e suficiente para obter essa condição. Um critério conveniente é que X admita uma norma equivalente $\|\cdot\|_t$ tempo dependente que seja localmente Lipschitziana. Isto é, existe $c > 0$ tal que:

$$\frac{\|x\|_t}{\|x\|_s} \leq e^{c|t-s|}, \text{ para todo } t, s \geq \tau \text{ e para todo } x \neq 0 \text{ em } X.$$

Dado um sistema CD de Kato, $(\{A(t)\}_{t \geq \tau}, X, Y)$, existe um processo de evolução $\{P(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ de modo que a única solução branda do problema linear não-homogêneo:

$$\begin{cases} u'(t) - A(t)u = f(t); & t \geq \tau \\ u(\tau) = u_\tau \end{cases}, \quad (3.13)$$

é dado por:

$$u(t) = P(t, \tau)u_\tau + \int_\tau^t P(t, s)f(s)ds,$$

onde $f \in L^1(\tau, +\infty; X)$ e $u_\tau \in X$.

Sendo uma solução forte $u \in C^0([\tau, +\infty); Y) \cap C^1((\tau, +\infty); X)$. quando $u_\tau \in Y$ e $f \in W^{1,1}(\tau, +\infty; X)$.

Observe que o crescimento da solução é controlado pelas constantes uniforme da família $\{\{S_t(s)\}_{s \geq \tau}\}_{t \geq \tau}$ de semigrupos (condição (ii) da Definição 2.23), garantindo:

$$\|u(t)\|_X \leq M e^{\omega(t-\tau)} \|u_\tau\|_X + M \int_\tau^t e^{\omega(t-s)} \|f(s)\|_X ds.$$

Quando $f \equiv 0$, o problema (3.13) é homogêneo, e a solução é dada por $u(t) = P(t, \tau)u_\tau$. Note o o processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ substitui o semigrupo $\{S(t-\tau)\}_{t \geq \tau}$ do caso autônomo, mas agora depende explicitamente de τ e t (não apenas da diferença $t - \tau$).

Mais geralmente, o problema não-linear e não-homogêneo:

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u = f(t, u(t)); & t \geq \tau \\ u(\tau) = u_\tau \end{cases}, \quad (3.14)$$

adimite uma única solução branda local dada por

$$u(t) = P(t, \tau)u_\tau + \int_\tau^t P(t, s)f(s, u(s))ds,$$

onde $u_\tau \in X$, f é uma função contínua na variável $t \geq \tau$ e localmente Lipschitz sobre a variável $u \in X$, uniformemente em t sobre intervalos limitados e $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ é o processo dado pelo sistema CD de Kato.

Agora se consideramos o problema

$$\begin{cases} u'(t) - A(t)u + f(t, u(t)) = h(t); & t \geq \tau \\ u(\tau) = u_\tau \end{cases}, \quad (3.15)$$

deve-se ter $u_\tau \in X$, $f : [\tau, +\infty) \times X \rightarrow X$ contínua na variável $t \geq \tau$ e localmente Lipschitz sobre a variável $u \in X$, uniformemente em t sobre intervalos limitados, e $h \in L^1_{loc}(\tau, +\infty; X)$, para obter a solução branda local dada por:

$$u(t) = P(t, \tau)u_\tau + \int_\tau^t P(t, s)[h(s) - f(s, u(s))]ds.$$

A solução forte é obtida quando $u_\tau \in Y$, $f : [\tau, +\infty) \times X \rightarrow X$ Lipschitziana na variável $t \geq \tau$, uniformemente para conjuntos limitados de X e localmente Lipschitz sobre a variável $u \in X$, uniforme em conjuntos intervalos limitados, e $h \in W^{1,1}_{loc}(\tau, +\infty; X)$.

A seguir definimos a noção de conjunto invariante e de atração no contexto dos processos evolutivos.

Definição 3.35

Seja $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ um processo evolutivo sobre um espaço métrico X . Uma família tempo-dependente $\{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de subconjunto $A(t) \subset X$ é *invariante* pelo processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ quando

$$P(t, s)A(s) = A(t); \quad \forall t \geq s.$$

A noção de *solução global* fornecida na Teoria de semigrupos (ver Definição 3.2) se encontra bem mais intuitiva no contexto dos processos evolutivos.

Definição 3.36

Seja $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ um processo evolutivo sobre o espaço métrico X . Uma *solução global* para $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ é uma função $\xi : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que

$$P(t, s)\xi(s) = \xi(t); \quad \forall t \geq s.$$

Proposição 3.37

Toda solução global de um processo evolutivo é uma aplicação contínua.

Demonstração. Análoga à demonstração da Proposição 3.7. □

Proposição 3.38

Seja $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ um processo de evolução. Uma família tempo-dependente $\{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é invariante pelo processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$, se e somente se ela consiste em uma coleção de soluções globais.

Demonstração. (Ver (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2013), p. 9). □

A noção de invariância definida para processos, difere da noção de invariância fornecida para semigrupos na Definição 3.4. Na verdade, o que ocorre é o seguinte. Enquanto qualquer solução global ξ de um semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é invariante para o processo induzido $\{P_T(t, s)\}_{t \geq s}$, é toda órbita $\xi(\mathbb{R})$ que é invariante para o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Note que a família constante $\{\gamma(t) = \xi(\mathbb{R}); \forall t \in \mathbb{R}\}$ também é invariante para $\{P_T(t, s)\}_{t \geq s}$. Mais geralmente, se $\{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é invariante para $\{P_T(t, s)\}_{t \geq s}$, então $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} A(t)$ é invariante para $\{T(t)\}_{t \geq 0}$; em particular, se $A(t) = A$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então A é invariante para $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ se e somente se $\{A(t)\}_{t \geq 0}$ é invariante para $\{P_T(t, s)\}_{t \geq s}$.

Definição 3.39

Seja $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ um processo evolutivo sobre um espaço métrico X . Dizemos que

- (i) Um conjunto $A \subset X$ *pullback atrai* um conjunto $B \subset X$ no tempo $t \in \mathbb{R}$ por meio (ou pela ação) do processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ se

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}_X(P(t, s)B, A) = 0.$$

- (ii) Uma família $\{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de subconjuntos de X *pullback atrai* um conjunto $B \subset X$ se para cada $t \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}_X(P(t, s)B, A(t)) = 0,$$

- (iii) Uma família $\{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de subconjuntos de X *pullback atrai* uma família $\widehat{B} = \{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de subconjuntos de X , se para cada $t \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}_X(P(t, s)B(s), A(t)) = 0,$$

onde dist_X é a *semidistância de Hausdorff* apresentada na Definição 3.9.

Uma família $\{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de subconjunto de X é dita *pullback atrativa* se pullback atrai todos os subconjuntos limitados de X .

Da mesma forma que foi feito para semigrupos, precisamos de uma noção de atrator global para processos evolutivos, que faça sentido a nossa noção de invariância e de atração.

Definição 3.40

Seja $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ um processo evolutivo em uma espaço métrico X . Uma família $\{\mathfrak{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de subconjuntos de X é o *atrator pullback* para o processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ se as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) $\mathfrak{A}(t) \subset X$ é compacto para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (ii) A família $\{\mathfrak{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é pullback invariante pelo processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$.
- (iii) A família $\{\mathfrak{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ pullback atrai todos os subconjuntos limitados de X pela ação do processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$.
- (iv) $\{\mathfrak{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é a família minimal de subconjuntos fechados de X que satisfaz a condição (iii). Mais precisamente, se $\{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é uma família de subconjuntos fechados de X que pullback atrai todos os limitados de X pelo processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$, então $\mathfrak{A}(t) \subset A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

As três primeiras condições da definição de um atrator pullback são análogas às do atrator global para semigrupos. A condição adicional (iv) garante a unicidade do atrator pullback. No caso de semigrupos, as três primeiras condições já asseguram a unicidade do atrator global, mas para o atrator pullback, a condição (iv) é essencial como veremos a seguir.

Proposição 3.41

Se $\{\mathfrak{A}_1(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\{\mathfrak{A}_2(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ são atratores pullback para um processo evolutivo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$, então $\mathfrak{A}_1(t) = \mathfrak{A}_2(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. O atrator pullback $\{\mathfrak{A}_1(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é em particular, uma família de conjuntos fechados que atrai subconjuntos limitados de X . Como $\{\mathfrak{A}_2(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é atrator pullback, do item (iv) da Definição

3.4O, segue que $\mathfrak{A}_2(t) \subset \mathfrak{A}_1(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Revertendo os papéis de $\{\mathfrak{A}_1(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ e $\{\mathfrak{A}_2(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, obtém-se que $\mathfrak{A}_1(t) \subset \mathfrak{A}_2(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. \square

Teorema 3.42

Seja $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço métrico X e considere o processo evolutivo induzido $\{P_T(t, s)\}_{t \geq s}$ (isto é, $P_T(t, s) := T(t-s)$; $\forall t \geq s$). Então $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ possui atrator global \mathfrak{A} se, e somente se, $\{P_T(t, s)\}_{t \geq s}$ possui atrator pullback $\{\mathfrak{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$. Nesse caso, tem-se $\mathfrak{A}(t) = \mathfrak{A}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Suponha que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ possua atrator global \mathfrak{A} e defina $\{\mathfrak{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ por $\mathfrak{A}(t) = \mathfrak{A}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto $\{\mathfrak{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é compacto para todo $t \in \mathbb{R}$. Agora, para $t \geq s$, tem-se

$$P_T(t, s)\mathfrak{A}(s) = T(t-s)\mathfrak{A} = \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(t),$$

mostrando a invariância.

Além disso, temos que $\{\mathfrak{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ pullback atrai conjuntos limitados pelo processo $\{P_T(t, s)\}_{t \geq s}$. De fato, se $t \in \mathbb{R}$ e $B \subseteq X$ é limitado, então

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}_X(P_T(t, s)B, \mathfrak{A}(t)) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}_X(T(t-s)B, \mathfrak{A}) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \text{dist}_X(T(u)B, \mathfrak{A}) = 0.$$

Por fim, seja $\{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ uma família de conjuntos fechados que pullback atrai subconjuntos limitados de X . Então,

$$\text{dist}_X(\mathfrak{A}(t), A(t)) = \text{dist}_X(P_T(t, s)\mathfrak{A}(s), A(t)) = \text{dist}_X(P_T(t, s)\mathfrak{A}, A(t)),$$

e tomando o limite quando $s \rightarrow -\infty$, concluímos que $\mathfrak{A}(t) \subseteq \overline{A(t)} \subset A(t)$. Portanto, $\{\mathfrak{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é o atrator pullback.

Por outro lado, suponha que $\{P_T(t, s)\}_{t \geq \tau}$ tenha o atrator pullback $\{\mathfrak{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$. Então, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e qualquer $B \subseteq X$ limitado, temos

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}_X(P_T(t, s)B, \mathfrak{A}(t)) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}_X(T(t-s)B, \mathfrak{A}(t)) = 0.$$

Seja $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrário e defina $\{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ por $A(t) := \mathfrak{A}(t_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Para $t \in \mathbb{R}$ e $B \subseteq X$ limitado, temos que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}_X(P_T(t, s)B, A(t)) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}_X(T(t-s)B, \mathfrak{A}(t_0)) = 0.$$

Assim, pela minimalidade, segue que $\mathfrak{A}(t) \subseteq A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $\mathfrak{A}(t) \subseteq \mathfrak{A}(t_0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $t_0 \in \mathbb{R}$ é arbitrário, de forma análoga, concluímos que $\mathfrak{A}(t_0) \subseteq \mathfrak{A}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $\mathfrak{A}(t) = \mathfrak{A}(t_0) =: \mathfrak{A}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Resta provar que \mathfrak{A} é o atrator global para $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. De fato, \mathfrak{A} é compacto e, para $t \geq 0$, tem-se

$$T(t)\mathfrak{A} = P_T(t, 0)\mathfrak{A}(0) = \mathfrak{A}(t) = \mathfrak{A}.$$

Logo, \mathfrak{A} é invariante.

Finalmente, dado $B \subseteq X$ limitado, temos $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}_X(T(t)B, \mathfrak{A}) = 0$. \square

3.2.2 Conjuntos ω -limites e Existência de Atrator Pullback

O objetivo desta subseção é obter condições suficientes e práticas do ponto de vista analítico para existência de atrator pullback para um processo de evolução. Começaremos definindo o conceito fundamental para esse objetivo.

Definiremos agora o conceito de conjunto *pullback ω -limite* que a peça fundamental do atrator pullback de um processo.

Definição 3.43

Sejam $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ um processo de evolução sobre um espaço métrico X e $B \subset X$. O conjunto *pullback ω -limite* de B no tempo $t \in \mathbb{R}$ com respeito ao processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ é definido por:

$$\omega(B, t) = \bigcap_{t \geq s} \left(\overline{\bigcup_{s \geq \tau} P(t, \tau)B} \right).$$

Lema 3.44

$\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ um processo de evolução sobre um espaço métrico X e $B \subset X$. Então $\omega(B, t)$ é fechado e $x \in \omega(B, t)$ se, e somente se, existem sequências $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em \mathbb{R} , com $s_n \leq t$; $\forall n \in \mathbb{N}$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X tais que

$$s_n \rightarrow -\infty, \quad x_n \in B; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad x = \lim_{n \rightarrow \infty} P(t, s_n)x_n.$$

Demonstração. (Ver (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2013), p. 25). □

Observe que, se $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo e $\{S_T(t, s)\}_{t \geq s}$ o processo por ele induzido, então $\omega(B, t)$ é independente de t e coincide com a definição de conjunto ω -limite para semigrupos, ou seja,

$$\omega(B, t) = \bigcap_{h \geq 0} \left(\overline{\bigcup_{s \geq h} T(s)B} \right) = \omega(B).$$

Teorema 3.45

Sejam X um espaço métrico e $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ um processo de evolução em X . O processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ admite um atrator pullback $\mathfrak{A}(t)$ se, e somente se, existe uma família de compacto pulback atrativa $\{K(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$. Nesse caso,

$$\mathfrak{A}(t) = \overline{\bigcup \{\omega(B, t); B \subset X \text{ e } B \text{ é limitado}\}}. \quad (3.16)$$

Demonstração. (Ver (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2013), p. 28-29). □

Definiremos agora a noção mais forte e mais prática do que o conceito de pullback atração.

Definição 3.46

Sejam X um espaço métrico e $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ um processo de evolução em X . Dizemos que

- (i) Um conjunto $A \subset X$ *pullback absorve* um conjunto $B \subset X$ pela ação do processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ no tempo $t \in \mathbb{R}$, quando existe $T = T(B, t) \leq t$ (dependente de B e t) tal que

$$P(t, s)B \subset A, \text{ para todo } s \leq T.$$

- (ii) Uma família $\{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de subconjuntos de X *pullback absorve* um conjunto $B \subset X$ se para cada $t \in \mathbb{R}$, existe $T = T(B, t) \leq t$ (dependente de B e t) tal que

$$P(t, s)B \subset A(t), \text{ para todo } s \leq T.$$

- (iii) Uma família $\{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de subconjuntos de X *pullback absorve* uma família $\widehat{B} = \{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de suconjuntos de X , se para cada $t \in \mathbb{R}$, existe $T = T(\widehat{B}, t) \leq t$ (dependente da família \widehat{B} e t) tal que

$$P(t, s)B(s) \subset A(t), \text{ para todo } s \leq T.$$

Uma família $\{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de subconjunto de X é dita *pullback absorvente* se pullback absorve todos os subconjuntos limitados de X . Observamos que, toda família pullback absorvente é uma família pullback atrativa.

Definição 3.47

Seja $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ um processo de evolução sobre um espaço métrico X . Dizemos que $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ é *pullback limitado dissipativo* ou simplesmente *pullback dissipativo*, quando existe uma família $\{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de subconjuntos limitados de X que pullback atrai cada um dos subconjuntos limitados de X sob a ação do processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$.

Corolário 3.48

Seja $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ um processo de evolução pulback limitado dissipativo sobre um espaço métrico X . Se a família absorvente $\{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é formada por conjuntos compactos, então o processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ admite (um único) atrator pullback dado por (3.16).

Demonstração. (Ver (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2013), p. 30). □

É importante observar que nem sempre é prático do ponto de vista das aplicações encontrar conjuntos compactos. Contudo, existe uma noção de compacidade mais computacional (analítica) para um processo de evolução, que também garante a existência de atrator pullback. A saber, a de *pullback compacidade assintótica*.

Definição 3.49

Dizemos que um processo de evolução $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ sobre um espaço métrico X é *pullback assintoticamente compacto* quando para todo $t \in \mathbb{R}$, toda sequência limitada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X e toda sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais, com $s_n \leq t$ e $s_n \rightarrow -\infty$, a sequência $(P(t, s_n)x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X possui uma subsequência convergente.

Definição 3.50

Dizemos que um processo de evolução $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ sobre um espaço métrico X é *fortemente pullback limitado dissipativo* se para cada $t \in \mathbb{R}$, existe um subconjunto limitado $B(t) \subset X$ que pullback atrai subconjuntos limitados de X no tempo τ para cada $\tau \leq t$, ou seja, dado um subconjunto limitado $B \subset X$ e $\tau \leq t$, temos

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}_X(P(\tau, s)B, B(t)) = 0.$$

Teorema 3.51

Sejam X um espaço métrico completo e $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ um processo de evolução sobre X . Se $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ é fortemente pullback limitado dissipativo e pullback assintoticamente compacto, então $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ admite um único atrator global \mathfrak{A} dado por:

$$\mathfrak{A}(t) = \omega\left(\overline{B(t)}, t\right); \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

onde $\{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é qualquer família que atraia suconjuntos limitados de X no tempo τ , com $\tau \leq t$.

Além disso, tem-se

$$\bigcup_{s \leq t} \mathfrak{A}(t) \text{ é limitado para cada } t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. (Ver (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2013), p. 34). □

3.2.3 Atratores Pullback com Bacias de Atração mais Gerais

Nas subseções anteriores, concentrarmo-nos em conjuntos que pullback atraem subconjuntos limitados de um espaço métrico X . Uma consequência disso é que, a menos que o atrator pullback seja limitado no passado, ele não pertence à classe de conjuntos que ele deve atrair. Isso impede a dedução da unicidade dos atratores pullback se a condição de minimalidade (não necessário no caso autônomo) for abandonada. Observe que, para garantir a compacidade do atrator pullback, tivemos de impor uma dissipatividade pullback forte (Teorema 3.51), o que também implica que o atrator pullback deve ser limitado no passado. Mas o atrator pullback pode ser compacto sem ser limitado no passado, como se pode ver no Teorema 3.45.

A atração pullback de conjuntos limitados fixos implica na atração pullback de famílias dependentes do tempo que são limitadas no passado. No entanto, é comum em aplicações que exista um atrator pullback que atraia famílias dependentes do tempo mais gerais, e nesta subseção desenvolveremos um pouco de uma teoria que permite essas bacias de atração mais gerais, uma vez que esse tipo mais geral de atrator pullback será necessário na resolução do problema não autônomo proposto no Capítulo 5 desta tese.

Teria sido possível desenvolver toda a teoria anterior neste contexto mais geral, mas a maior generalidade não pareceu merecer a complicaçāo resultante da apresentação. Não obstante, dentro desta estrutura podemos provar a unicidade de atratores e a sua compacidade a partir das definições apropriadas de processos pullback dissipativos e pullback assintoticamente compactos

Definição 3.52

Sejam X um espaço métrico e \mathcal{M} a coleção de todas as famílias (tempo dependentes) de subconjuntos não vazios de X . Dizemos que um subconjunto $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$ é um *universo de subconjuntos do espaço métrico X* se for *fechado por inclusão*. Mais precisamente, se satisfaz a seguinte condição:

- (i) Se $\widehat{D} = \{D(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}$, $\widehat{C} = \{C(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{M}$ e $C(t) \subset D(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então $\widehat{C} \in \mathcal{D}$.

Note que, devido ao requisito de que \mathcal{D} deve ser fechado por inclusão, a coleção de todas as famílias constantes $\widehat{D} = \{D(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, onde $D(t) = D$; $\forall t \in \mathbb{R}$ não forma um universo de subconjuntos de X . Em vez disso, o universo mínimo que inclui esses conjuntos (o universo limitado \mathcal{D}_B) consiste em todas as famílias dependentes do tempo $\widehat{D} = \{D(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ tais que, para algum conjunto limitado $D \subset X$, tem-se $D(t) \subset D$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 3.53

Sejam $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ um processo evolutivo sobre um espaço métrico X e \mathcal{D} um universo de subconjuntos do espaço métrico X . Dizemos que uma família $\{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de subconjuntos de X é

- (i) \mathcal{D} -pullback atrativa se pullback atrai todas as famílias \widehat{D} do universo \mathcal{D} .
- (ii) \mathcal{D} -pullback absorvente se pullback absorve todas as famílias $\widehat{D} \in \mathcal{D}$.

Definição 3.54

Sejam $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ um processo evolutivo sobre um espaço métrico X e \mathcal{D} um universo de subconjuntos de X . Uma família $\{\mathfrak{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de subconjuntos de X é o \mathcal{D} -atrator pullback para o processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ se as seguintes condições são satisfeitas:

- (i) $\mathfrak{A}(t) \subset X$ é compacto para todo $t \in \mathbb{R}$.
- (ii) A família $\{\mathfrak{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é pullback invariante pelo processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$.
- (iii) A família $\{\mathfrak{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é \mathcal{D} -pullback atrativa.
- (iv) $\{\mathfrak{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é a família minimal de subconjuntos fechados de X que satisfaz a condição (iii). Mais precisamente, se $\{A(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é uma família de subconjuntos fechados de X que pullback atrai todos os limitados de X pelo processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$, então $\mathfrak{A}(t) \subset A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

As noções de conjunto pullback atrativo (Definição 3.39), conjunto pullback absorvente (Definição 3.46) e de atrator pullback (Definição 3.40) coincidem com as respectivas definições de conjunto \mathcal{D} -pullback atrativo, conjunto \mathcal{D} -pullback absorvente e de \mathcal{D} -atrator pullback, quando consideramos \mathcal{D} como sendo o universo limitado \mathcal{D}_B de todas as famílias (tempo dependentes) $\widehat{D} = \{D(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ tais que, para algum conjunto limitado $D \subset X$, tem-se $D(t) \subset D$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.55

Diferentes universos fornecem diferentes bacias de atração, e darão origem a diferentes atratores, refletindo diferentes aspectos da dinâmica. De fato, considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x); & t \geq \tau \\ x(\tau) = x_\tau \in \mathbb{R} \end{cases},$$

onde

$$f(t, x) \begin{cases} -x, & \text{se } x \in [-e^{-t}, e^{-t}] \\ -x - x(x - e^{-t})e^t, & \text{se } e^{-t} \leq |x| \leq 2e^{-t} \\ -2x, & \text{se } |x| \geq 2e^{-t} \end{cases}.$$

Se o universo \mathcal{D} contém $\hat{D} = \{[-e^{-t}, e^{-t}]; \forall t \in \mathbb{R}\}$, então o \mathcal{D} -atrator Pullback $\{\mathfrak{A}_{\mathcal{D}}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ irá satisfazer

$$[-e^{-t}, e^{-t}] \subset \mathfrak{A}_{\mathcal{D}}(t) \subset [-2e^{-t}, 2^{-t}].$$

Por outro lado, se desejarmos atrair apenas conjuntos limitados, então o atrator pullback será $\{\mathfrak{A}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, com $\mathfrak{A}(t) = \{0\}$.

Uma forma de escolher (de forma natural) a bacia de atração do atrator pullback de um determinado problema é tentar encontrar o maior universo possível \mathcal{D} para o qual existe um \mathcal{D} -atrator pullback. Por exemplo, se considerarmos o problema:

$$\begin{cases} x'(t) = -kx + f(t); & t \geq \tau \\ x(\tau) = x_\tau \in \mathbb{R} \end{cases},$$

que possui a seguinte solução explícita:

$$x(t) = e^{-k(t-\tau)}x_\tau + \int_\tau^t e^{-k(t-s)}f(s)ds,$$

observamos (essencialmente) que se $\int_{-\infty}^0 e^{ks}f(s)ds$ converge, então $x^*(t) = \int_{-\infty}^t e^{-k(t-s)}f(s)ds$ pullback atrai conjuntos limitados de condições iniciais. No entanto, é evidente que se pode, de fato, permitir que $x(\tau)$ cresça quando $\tau \rightarrow -\infty$, desde que $e^{k\tau}x(\tau) \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow -\infty$. Assim, poderíamos considerar a coleção de todas as famílias do tipo

$$\left\{ \{x(s)\}_{s \in \mathbb{R}}; e^{ks}x(s) \rightarrow 0 \text{ quando } s \rightarrow -\infty \right\}$$

como universo \mathcal{D} .

Para finalizar a seção, definiremos o conceito de conjunto ω -limite para \mathcal{D} -atratores pullback, bem como os principais conceitos e resultados que utilizaremos para mostrar a existência de atrator pullback para o problema não autônomo que será estudado no capítulo 5.

Definição 3.56

Sejam $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ um processo evolutivo sobre um espaço métrico X e \mathcal{D} um universo de subconjuntos de X . Dado $\hat{D} = \{D(t); t \in \mathbb{R}\}$ em \mathcal{D} , o *pullback ω -limite de \hat{D}* é definido por:

$$\omega(\hat{D}, t) = \bigcap_{t \geq s} \overline{\bigcup_{s \geq \tau} P(t, \tau)D(\tau)}.$$

Definição 3.57

Sejam $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ um processo evolutivo sobre um espaço métrico X e \mathcal{D} um universo de subconjuntos de X . O processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ é dito \mathcal{D} -pullback assintoticamente compacto se, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, qualquer $\widehat{D} = \{D(t); \forall t \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{D}$ e, quaisquer sequências $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $(-\infty, t]$ e $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em X tais que $s_n \rightarrow -\infty$ e $x_n \in D(s_n)$; $\forall n \in \mathbb{N}$, a sequência $\{P(t, s_n)x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em X .

Teorema 3.58

Sejam $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ um processo evolutivo sobre um espaço métrico X e \mathcal{D} um universo de subconjuntos de X . Se o processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ é \mathcal{D} -pullback assintoticamente compacto e admite uma família $\widehat{B} = \{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ \mathcal{D} -pullback absorvente, então a família $\{\mathfrak{A}_{\mathcal{D}}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ definida por

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{D}}(t) = \overline{\bigcup_{\widehat{D} \in \mathcal{D}} \omega(\widehat{D}, t)}.$$

é o \mathcal{D} -atrator pullback para o processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$.

Além disso, se $\widehat{B} \in \mathcal{D}$, então $\mathfrak{A}_{\mathcal{D}}(t) = \omega(\widehat{B}, t) \subset \overline{B(t)}$ e $\{\mathfrak{A}_{\mathcal{D}}(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}$.

Demonstração. (Ver (CARVALHO; LANGA; ROBINSON, 2013), p. 51–52). □

Proposição 3.59

Sejam $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ um processo de evolução sobre um espaço métrico completo (X, d) e \mathcal{D} um universo de subconjuntos de X . Suponha que existe uma família $\widehat{B} = \{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de subconjuntos de X , \mathcal{D} -pullback absorvente. Se para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número real τ^* (dependente de \widehat{B} e de ε) e uma função contrativa (ver Definição 3.25) $f_{\tau^*} : B(\tau^*) \times B(\tau^*) \subset X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:

$$d(P(t, \tau^*)x_1, P(t, \tau^*)x_2) \leq \varepsilon + f_{\tau^*}(x_1, x_2); \quad \forall x_1, x_2 \in B(\tau^*),$$

então o processo $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ é \mathcal{D} -pullback assintoticamente compacto em X .

Demonstração. (Ver (MA; SOUZA, 2017), Teorema 3.2). □

Capítulo 4

Sobre um sistema de ponte suspensa do tipo Timoshenko com amortecimento interno fracionário

Vários problemas em diversas áreas do conhecimento podem ser representados por meio de expressões matemáticas, com destaque para aqueles em Física e Engenharia. No caso da Engenharia, um modelo de viga amplamente conhecido foi inicialmente introduzido pelo engenheiro mecânico ucraniano Stephen Prokofievich Timoshenko. Em 1921, Timoshenko formulou, em (TIMOSHENKO, 1921), uma equação matemática para descrever as vibrações transversais de uma viga de comprimento L , a qual se tornou uma referência na área, sendo expressa pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \rho_1 \phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) = 0, \end{cases}$$

onde $0 \leq x \leq L$ é a variável posição que denota a distância ao longo da linha central da viga, e $t \geq 0$ a variável tempo. A função $\phi = \phi(x, t)$ representa o deslocamento transversal, enquanto $\psi = \psi(x, t)$ corresponde à rotação das fibras transversais da viga. Os coeficientes são números reais positivos: $\rho_1 = \rho A$, $\rho_2 = \rho I$, $b = EI$ e $K = \kappa GA$, onde ρ é a densidade de massa do material, A e I representam a área e o momento de inércia de uma seção transversal da viga, G e E denotam os módulos de cisalhamento e de elasticidade de Young, e κ é um fator de coreção do cisalhamento.

Sobre esse sistema pioneiro, temos uma vasta literatura; veja, por exemplo, (ADNANE; BENAISSE; BENOMAR, 2023; BENAISSE; BENAZZOUZ, 2017; RAPOSO et al., 2005; SOUFYANE, 1999).

Uma ponte suspensa, Figura 2, é uma estrutura mecânica que transporta cargas verticais por meio dos cabos principais modelados por uma corda elástica que é acoplada à uma viga por meio de cabos de suspensão. Um sistema para ponte suspensa, em que o tabuleiro (deck) é modelado pela

teoria de vigas de Timoshenko, é dado por:

$$\begin{cases} u_{tt} - au_{xx} - \tau(\phi - u) = 0, \\ \rho_1 \phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x + \tau(\phi - u) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) = 0. \end{cases}$$

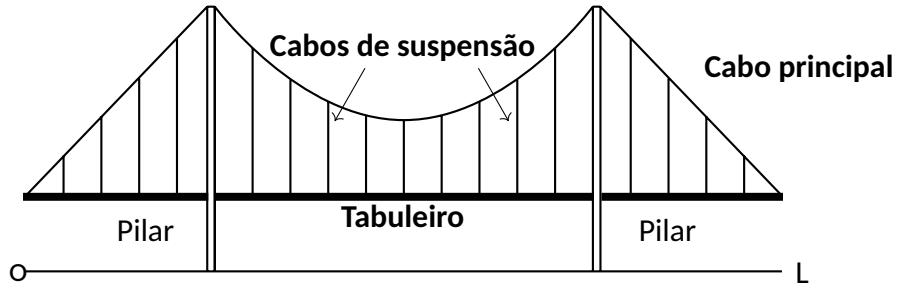


Figura 2 – Ponte suspensa. Esta figura foi extraída da referência (RAPOSO et al., 2023).

Nesse modelo, considerou-se que o tabuleiro tem dimensões de seção transversal insignificantes em comparação com seu comprimento (vão da ponte). Presume-se que os cabos de suspensão sejam molas elásticas lineares com rigidez padrão $\tau > 0$. A função $u = u(x, t)$ representa as vibrações verticais do cabo principal e a constante $a > 0$ é o módulo de elasticidade dos cabos de suspensão (que prende o cabo principal ao tabuleiro)

Uma das pontes suspensas mais antigas do mundo foi construída em Viena, na França, em 1829; a ponte de Vienne, Figura 3, atravessa o rio Rhône. Atualmente, ela está aberta apenas para pedestres, mas continua sendo uma maravilha histórica da engenharia.



Figura 3 – Extraído de www.bridgemeister.com/imgdda/ddfrvienne1.jpg

A ponte suspensa mais longa do mundo é a Ponte Çanakkale de 1915, Figura 4, no Estreito de Dardanelos, na Turquia, que liga a Europa à Ásia.



Figura 4 – Extraído de www.azernews.az/region/190860.html

Historicamente, a necessidade de entender como essas estruturas se comportam foi e é fundamental para o desenvolvimento humano. Há muitos casos em que as pontes suspensas precisam de reparos devido à ação de forças naturais, como o vento, as correntes marítimas e a passagem de pedestres e veículos. Na Ponts des Arts, em Paris, milhares de cadeados presos à estrutura por casais foram removidos em 2015. Além de afetar a estética, eles causaram danos à integridade da própria ponte, o que poderia causar acidentes.

A Tacoma Narrow Bridge, Figura 5, teve sua estrutura destruída, poucos meses após sua inauguração devido a falhas de projeto que não previram os efeitos da ressonância do vento e da vibração aeronáutica.



Figura 5 – Extraído de www.azernews.az/region/190860.html

Em 2022, a Ponte Rio-Niterói, Figura 6, que liga as cidades do Rio de Janeiro e Niterói no Brasil, também foi atingida por um navio e teve que ser parcialmente fechada por cinco dias para reparo de sua estrutura. Devido à instalação de Atenuadores Dinâmicos Sincronizados, desenvolvidos e patenteados pelo Professor Ronaldo Battista do Programa de Engenharia Civil da COPPE na Universidade Federal do Rio de Janeiro, a Ponte Rio-Niterói não desabou.



Figura 6 – Extraído de <https://www.marinha.mil.br/dphdm/ponte-rio-niteroi>

Em (ARIOLI; GAZZOLA, 2015), Arioli e Gazzola, sugeriram um novo modelo para a dinâmica de uma ponte suspensa por meio de um sistema de equações diferenciais hiperbólicas não lineares e não locais, em que as equações são de segunda e quarta ordem e descrevem o comportamento dos principais componentes da ponte. Bochicchio et al. (AOURAGH; BAZ; SEGAOUI, 2020) estudaram um problema linear das vibrações de uma ponte suspensa acoplada como uma viga termoelástica dada pela lei de Fourier, em que o tabuleiro é modelado pela teoria de vigas de Timoshenko.

Mais recentemente, Aouragh et al. (AOURAGH; BAZ; SEGAOUI, 2024) discutiram o comportamento assintótico das vibrações de um problema de ponte suspensa acoplada, em que um leito de estrada de um único vão foi modelado como uma viga termoelástica extensível e amortecida,

apoiada nas extremidades e usando a lei de Cattaneo para descrever a condução de calor. Raposo et al. (RAPOSO et al., 2023), provaram a existência e a unicidade de uma ponte suspensa modelada pela teoria de vigas de Timoshenko com amortecimento interno, obtendo, além do decaimento exponencial, a analiticidade da solução. Posteriormente, esse trabalho foi generalizado por Nascimento et al. (NASCIMENTO; NONATO; RAMOS, 2025), que consideraram o mesmo modelo sob mecanismos não lineares de amortecimento interno localizado, afetando todas as três equações de onda. Especificamente, eles demonstraram que um amortecimento aplicado em um intervalo arbitrariamente pequeno, mas com medida positiva, é eficaz, independentemente do seu tamanho. Além disso, estabeleceram a existência e unicidade das soluções e determinaram algumas taxas de decaimento para essas soluções sem assumir qualquer relação entre os coeficientes. Por fim, provaram um resultado sobre a observabilidade interna do sistema conservativo, garantindo o comportamento assintótico mencionado.

Uma ponte suspensa com vigas laminadas, ou seja, duas vigas de Timoshenko conectadas em paralelo, foi considerada em (RAPOSO, 2023) e provou a existência, a unicidade da solução e a estabilidade exponencial. O monitoramento da saúde estrutural de pontes a partir de eventos dinâmicos foi considerado em (ARAGÓN; PUCHOL; ASTIZ, 2024). A análise de estabilidade de uma ponte suspensa parcialmente amortecida por atrito foi estudada por Gutemberg et al. (GUTEMBERG et al., 2024).

Motivado pelos trabalhos citados anteriormente, este capítulo tem como objetivo analisar um modelo de ponte suspensa cujo tabuleiro é representado com base na teoria das vigas de Timoshenko e submetido à influência de mecanismos de amortecimento internos, descritos por operadores do tipo derivada fracionária. Mais precisamente, o modelo é dado por:

$$\begin{aligned} u_{tt} - au_{xx} - \tau(\phi - u) + c_1 \partial_t^{\alpha, \eta} u &= 0; \quad x \in (0, L) \text{ e } t > 0, \\ \rho_1 \phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x + \tau(\phi - u) + c_2 \partial_t^{\beta, \zeta} \phi &= 0; \quad x \in (0, L) \text{ e } t > 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + c_3 \partial_t^{\theta, \xi} \psi &= 0; \quad x \in (0, L) \text{ e } t > 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde $c_j > 0$ e $\partial_t^{\omega, \delta}$ é o operador derivada fracionária de Caputo exponencialmente modificada de ordem ω e peso δ .

O sistema (4.1) está sujeito a dados iniciais:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x); \quad x \in (0, L), \\ \phi(x, 0) &= \phi_0(x), \quad \phi_t(x, 0) = \phi_1(x); \quad x \in (0, L), \\ \psi(x, 0) &= \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x); \quad x \in (0, L), \end{aligned} \quad (4.2)$$

e às condições de contorno de Dirichlet-Dirichlet-Neumann:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(L, t) = 0; \quad t \geq 0, \\ \phi(0, t) &= \phi(L, t) = 0; \quad t \geq 0, \\ \psi_x(0, t) &= \psi_x(L, t) = 0; \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Este capítulo está dividido em três seções. Na primeira seção, definimos o conceito de derivada de Caputo exponencialmente modificada e, a partir de suas propriedades fundamentais, realizamos uma mudança de variável que permite, após essa transformação, reescrever o problema (4.1)–(4.3) na forma de um problema linear abstrato de Cauchy.

Os resultados apresentados neste capítulo foram publicados no periódico *Acta Mechanica*, conforme o artigo ([JESUS et al., 2025a](#)).

4.1 Derivada Fracionária e Modelo Ampliado

Nesta seção, definiremos de maneira clara e concisa o conceito de derivada de ordem fracionária, destacando sua relevância, origem e aplicações. Diferentemente do cálculo diferencial e integral clássico, o Cálculo Fracionário abrange diversas noções de derivadas e integrais de ordem não inteira, cada uma com suas particularidades e utilidades. Nosso foco será na formulação introduzida pelo matemático italiano Michele Caputo, apresentada em ([CAPUTO, 1967](#)), que se destaca por sua aplicabilidade em problemas físicos e de engenharia.

Em seguida, transformaremos o sistema (4.1)–(4.3) em um sistema equivalente ampliado, por meio de uma mudança de variável inspirada no trabalho desenvolvido em ([MBODJE, 2006](#)). Essa transformação tem como objetivo principal substituir o operador de derivada fracionária por um termo integral mais tratável computacionalmente, o que simplificará a análise matemática do problema.

Com essa reformulação, o sistema será reescrito na forma de Cauchy, uma estrutura que permite a aplicação direta da teoria de semigrupos discutida na seção anterior. Essa abordagem não só facilita a análise matemática, mas também possibilita o estudo de propriedades fundamentais, como existência, unicidade e comportamento assintótico das soluções. Dessa forma, estabelecemos as bases necessárias para uma compreensão mais profunda e uma aplicação prática do modelo em questão.

Por fim, apresentaremos lemas técnicos relacionados ao termo integral obtido com a ampliação do sistema. Esses lemas serão essenciais para as estimativas desenvolvidas nas seções posteriores, onde estudaremos a boa-colocação (existência e unicidade de soluções) e o comportamento assintótico do sistema ampliado e, consequentemente, do sistema original (4.1)–(4.3).

4.1.1 Derivada de Ordem Fracionária

Dado um número real $x > 0$ e um inteiro positivo n , é simples calcular a potência x^n , que corresponde a $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ fatores}}$. No entanto, expressões como x^π não são tão diretas de calcular, embora sejam bem definidas. De maneira análoga, pode-se imaginar que $\frac{d^\pi}{dt^\pi} f(t)$ não seja tão

intuitiva quanto $\frac{d^n}{dt^n} f(t)$ para n inteiro, mas que ainda assim faça algum sentido. A ideia por trás dessa generalização está enraizada na extensão de expressões originalmente definidas para números inteiros para todo o conjunto dos números reais. Por exemplo, para $\alpha \in \mathbb{R}$, define-se $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

Um caso semelhante ocorre com o fatorial. Para $n \in \mathbb{N}$, temos $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Essa operação pode ser generalizada para todo número complexo com parte real positiva. De fato, temos $z! = \Gamma(z+1)$, onde $\Gamma : \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ é a função *gamma de Riemann*, definida por:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \sigma^{z-1} e^{-\sigma} d\sigma.$$

A função Γ é caracterizada pelas seguintes propriedades fundamentais:

$$\Gamma(n+1) = n!; \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \forall z \in \mathbb{C}, \text{ com } \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (4.4)$$

O cálculo fracionário, que estuda integrais e derivadas de ordem real ou complexa arbitrária, ganhou popularidade e relevância significativas nas últimas décadas. Esse crescimento deve-se, em grande parte, às suas aplicações bem-sucedidas em diversos campos da ciência e da engenharia. Por exemplo, ele tem sido utilizado em bioengenharia (MAGIN, 2006), dinâmica de partículas, campos e meios (TARASOV, 2011), modelos de transmissão da COVID-19 que simulam a interação entre morcegos, hospedeiros, reservatórios e pessoas, incluindo medidas de controle e resposta individual (SHAIKH; SHAIKH; NISAR, 2020), circuitos elétricos (ALSHABANAT et al., 2020), e em diversas áreas da matemática e engenharia (PODLUNY, 1998; KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006; ZARRAGA et al., 2019).

A particularidade do cálculo fracionário reside no fato de que derivadas e integrais de ordem não inteira são não locais, ou seja, levam em consideração o histórico e os efeitos distribuídos ao longo do tempo ou do espaço. Isso permite uma representação mais fiel de fenômenos naturais, oferecendo uma perspectiva mais rica e abrangente para descrever sistemas complexos. Recentemente, Ammari et al. (AMMARI; HASSINE; ROBIANO, 2022) desenvolveram métodos unificados para estabilizar sistemas de evolução fracionária. Eles abordaram a estabilização de equações de evolução abstratas com amortecimento fracionário, validando os resultados teóricos com exemplos concretos. Alguns casos particulares já foram estudados anteriormente. Recentemente, destacam-se os seguintes trabalhos (AMMARI et al., 2025; JESUS et al., 2025b; OLIVEIRA; CORDEIRO; CUNHA, 2024).

Os avanços mais recentes em dinâmica não linear têm demonstrado o papel crucial do amortecimento fracionário na modificação do comportamento de osciladores em diversos sistemas físicos. Coccolo et al. (COCCOLO et al., 2023) revelaram como parâmetros fracionários governam tanto as amplitudes de oscilação quanto os tempos transitórios em osciladores de Duffing, sendo que seu estudo de 2024 (COCCOLO; SEOANE; SANJUÁN, 2024) identificou ainda fenômenos ressonantes que emergem exclusivamente em sistemas com amortecimento fracionário. Estas descobertas complementam trabalhos anteriores de Ortiz et al. (ORTIZ et al., 2020) sobre o oscilador de Helmholtz, nos

quais o amortecimento fracionário demonstrou alterar significativamente a dinâmica de escape e a geração de caos por meio do controle da ordem da derivada fracionária.

A interação entre amortecimento e sistemas com atraso temporal foi igualmente investigada por Cantisán et al. (CANTISÁN et al., 2020; COCCOLO et al., 2021), que demonstraram como atrasos temporais podem neutralizar efeitos de amortecimento através de mecanismos de ressonância em osciladores de Duffing. Coletivamente, estes estudos estabelecem que parâmetros de amortecimento fracionário modificam fundamentalmente a dinâmica dos sistemas de maneiras que modelos de ordem inteira não conseguem capturar; particularmente no controle de comportamentos transitórios, fenômenos de ressonância e transições caóticas, fornecendo insights cruciais para a modelagem de sistemas mecânicos complexos como pontes suspensas, onde tais efeitos são fisicamente observados.

Acredita-se que o conceito de cálculo fracionário tenha se originado de uma questão proposta em 1695 pelo Marquês de L'Hôpital (1661–1704) a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). L'Hôpital questionou o significado da notação de Leibniz $d^n x/d t^n$, para $n = 1/2$, marcando o início das investigações sobre derivadas de ordem não inteira. Posteriormente, o matemático e físico suíço Leonhard Paul Euler, em 1730, sugeriu uma abordagem para definir derivadas de ordem negativa ou não inteira (racional) para funções da forma $x = t^m$. A ideia de Euler, de forma simplificada, foi a seguinte:

Observe que, para $m, n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\frac{d^n t^m}{d t^n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-n+1) t^{m-n}.$$

No entanto, pela propriedade da função gama, sabemos que:

$$\Gamma(m+1) = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-n+1) \Gamma(m-n+1).$$

Portanto, a derivada pode ser reescrita como:

$$\frac{d^n t^m}{d t^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} t^{m-n}.$$

Aplicando essa ideia para $m = 1$ e $n = 1/2$, por exemplo, obtemos:

$$\frac{d^{1/2} t}{d x^{1/2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} t^{1/2} = \frac{1!}{\Gamma(1/2+1)} t^{1/2}.$$

Sabendo que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ e utilizando a propriedade (4.4), obtemos:

$$\frac{d^{1/2} t}{d x^{1/2}} = \frac{1}{\Gamma(1/2)/2} t^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}/2} t^{1/2} = \frac{2\sqrt{\pi}t}{\pi}$$

Embora Euler tenha começado a explorar ideias relacionadas ao cálculo fracionário em 1730, o artigo (EULER, 1738) contém algumas das primeiras discussões relevantes sobre o tema, especialmente no contexto da interpolação de séries e da generalização do conceito de diferenciação. Posteriormente, derivadas fracionárias foram mencionadas em diferentes contextos por diversos

matemáticos, como Lagrange em 1772, Laplace em 1812, Fourier em 1822, Liouville em 1832 e Riemann em 1867.

Por muito tempo, o cálculo fracionário permaneceu esquecido. No entanto, nas últimas décadas, ele retornou com força total devido à alta demanda por modelos cada vez mais realistas em engenharia, física e outras áreas. A seguir, apresentamos dois dos conceitos mais populares de derivada fracionária desenvolvidos recentemente:

Definição 4.1

Sejam $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(\omega) > 0$, e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq \operatorname{Re}(\omega) < n$. A *derivada fracionária de ordem ω segundo Riemann-Liouville* de uma função $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por:

$$D^\omega f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\omega)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-(\omega+1)} f(s) ds$$

A *integral fracionária de ordem ω segundo Riemann-Liouville* de f é definida por:

$$J^\omega f(t) = \frac{1}{\Gamma(\omega)} \int_0^t (t-s)^{\omega-1} f(s) ds$$

Note que

$$D^\omega f(t) = \frac{d^n}{dt^n} J^{n-\omega} f(t) \quad \text{e} \quad D^\omega J^\omega f(t) = f(t).$$

Além disso:

$$J^\omega D^\omega f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{\omega-1} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}.$$

Em particular para $\omega = 1$, temos:

$$J^1 D^1 f(t) = f(t) - f(0).$$

Para mais detalhes sobre as propriedades da derivada e da integral fracionária de Riemann-Liouville, consulte ([KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006](#)); seção 2.1.

Definição 4.2

Sejam $\omega \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(\omega) > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n - 1 \leq \operatorname{Re}(\omega) < n$. A *derivada fracionária de ordem ω segundo Caputo* de uma função $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, é dada por:

$$D_C^\omega f(t) = J^{n-\omega} \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\omega)} \int_0^t (t-s)^{n-(\omega+1)} f^{(n)}(s) ds,$$

Observe que, quando $\omega \in \mathbb{N}$, a derivada de Caputo coincide com a n -ésima derivada ordinária.

Para $n = 1$, temos:

$$D_C^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds, \quad \text{para } 0 \leq \operatorname{Re}(\alpha) < 1$$

Uma observação é oportuna. A derivada de Caputo está em concordância com o cálculo feito por Euler em 1730. De fato:

$$D_C^{1/2} t = \frac{1}{\Gamma(1-1/2)} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} ds = -\frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_t^0 \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{2\sqrt{\pi t}}{\pi}$$

Observamos que a definição de Caputo da derivada fracionária é uma reformulação da definição de Riemann-Liouville. Ela possui uma interpretação simples, porém interessante: se a função $f(t)$ representa o histórico de deformação em um material viscoelástico cuja função de relaxamento é $[\Gamma(1-\omega)t^\omega]^{-1}$, então o material sofrerá, a qualquer momento, uma tensão total em t dada a expressão $D_C^\omega f(t)$. De fato, em (CAPUTO, 1969), Caputo utilizou essa formulação para resolver um problema relacionado à viscoelasticidade.

No problema (4.1)–(4.3) e em outros problemas que estudaremos neste trabalho, utilizamos uma variação da derivada fracionária de Caputo (com $0 < \text{Re}(\omega) < 1$) como um sistema de amortecimento, visando obter um sistema dissipativo. Em (CHOI; MACCAMY, 1989), Choi e MacCamy definiram operadores integro-diferenciais fracionários de Caputo com peso exponencial da seguinte forma:

Definição 4.3

Sejam $0 < \omega < 1$ e $\delta \geq 0$. A *derivada fracionária de Caputo exponencialmente modificada de ordem α e peso δ* de uma função $f \in W^{1,1}([0, +\infty))$ é definida por

$$\partial_t^{\omega, \delta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\omega)} \int_0^t e^{-\delta(t-s)} (t-s)^{-\omega} f'(s) ds. \quad (4.5)$$

A *integral fracionária de Caputo exponencialmente modificada de ordem α e peso δ* de uma função $f \in L^1([0, +\infty))$ é definida por

$$J_t^{\omega, \delta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\omega)} \int_0^t e^{-\delta(t-s)} (t-s)^{\omega-1} f(s) ds. \quad (4.6)$$

Os operadores D_C^ω e $\partial_t^{\omega, \delta}$ diferem apenas em seus núcleos. O operador $\partial_t^{\omega, \delta}$ é essencialmente a derivada fracionária de Caputo, mas com um fator exponencial adicional que depende do peso δ . Quando $\delta = 0$, temos $\partial_t^{\omega, 0} = D_C^\omega$. Além disso, os operadores definidos em (4.5) e (4.6) estão relacionados pela seguinte identidade fundamental:

$$\partial_t^{\omega, \delta} f(t) = J_t^{1-\omega, \delta} f'(t). \quad (4.7)$$

4.1.2 Modelo Ampliado

Proposição 4.4

Sejam $0 < \omega < 1$, $\delta \geq 0$ e $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $p(y) = |y|^{\frac{2\omega-1}{2}}$. Então para cada $\mathcal{U} \in C^0([0, +\infty))$, a solução $\varphi: [0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ do problema:

$$\begin{cases} \varphi_t(t, y) + (y^2 + \delta) \varphi(t, y) = p(y) \mathcal{U}(t); & y \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \\ \varphi(0, y) = 0; & y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

satisfaz a seguinte relação:

$$\gamma \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi(t, y) dy = J^{1-\omega, \delta} \mathcal{U}(t),$$

$$\text{onde } \gamma = \frac{1}{\Gamma(\omega)\Gamma(1-\omega)} = \frac{\sin(\omega\pi)}{\pi}.$$

Demonação. Primeiro, note que a solução $\varphi(t, y)$ é dada por:

$$\varphi(t, y) = p(y) \int_0^t e^{-(y^2+\delta)(t-s)} \mathcal{U}(s) \, ds. \quad (4.8)$$

Para verificar isso, multiplicamos a equação diferencial pelo fator integrante $e^{(y^2+\delta)t}$, obtendo:

$$e^{(y^2+\delta)t} \varphi_t(t, y) + (y^2 + \delta) e^{(y^2+\delta)t} \varphi(x, t) = p(y) e^{(y^2+\delta)t} \mathcal{U}(t).$$

Isso pode ser reescrito como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(e^{(y^2+\delta)t} \varphi(t, y) \right) = p(y) e^{(y^2+\delta)t} \mathcal{U}(t).$$

Integrando ambos os lados de 0 a t e utilizando a condição inicial $\varphi(0, y) = 0$, obtemos:

$$\left(e^{(y^2+\delta)t} \varphi(t, y) \right) = p(y) \int_0^t e^{(y^2+\delta)s} \mathcal{U}(s) \, ds.$$

Portanto:

$$\varphi(t, y) = p(y) \int_0^t e^{-(y^2+\delta)t} e^{(y^2+\delta)s} \mathcal{U}(s) \, ds = p(y) \int_0^t e^{-(y^2+\delta)(t-s)} \mathcal{U}(s) \, ds,$$

como afirmado em (4.8).

Agora, definimos:

$$\mathcal{O}(t) = \gamma \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi(t, y) \, dy, \quad (4.9)$$

onde $\gamma = (\Gamma(\omega)\Gamma(1-\omega))^{-1}$.

Substituindo a expressão de $\varphi(t, y)$ dado por (4.8) em (4.9) e aplicando o Teorema de Fubini, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(t) &= \gamma \int_{\mathbb{R}} \int_0^t [p(y)]^2 e^{-(y^2+\delta)(t-s)} \mathcal{U}(s) \, ds \, dy \\ &= \gamma \int_0^t \int_0^{+\infty} 2|y|^{2\omega-1} e^{-(y^2+\delta)(t-s)} \mathcal{U}(s) \, dy \, ds. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Fazendo a mudança de variável $\sigma = y^2(t-s)$, temos $d\sigma = 2y(t-s)dy$. Observe que:

$$\sigma^{\omega-1} = \frac{y^{2\omega-1}}{y} \cdot \frac{(t-s)^\omega}{t-s}$$

Portanto:

$$\sigma^{\omega-1} (t-s)^{-\omega} d\sigma = 2y^{2\omega-1} dy \quad (4.11)$$

Substituindo (4.11) na integral, (4.10), obtemos:

$$\mathcal{O}(t) = \gamma \int_0^t (t-s)^{-\omega} e^{-\delta(t-s)} \int_0^{+\infty} \sigma^{\omega-1} e^{-\sigma} d\sigma \mathcal{U}(s) \, ds.$$

Como $\Gamma(\omega) = \int_0^{+\infty} \sigma^{\omega-1} e^{-\omega} \, d\sigma$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\omega)\Gamma(1-\omega)} \int_0^t (t-s)^{-\omega} e^{-\delta(t-s)} \Gamma(\omega) \mathcal{U}(s) \, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\omega)} \int_0^t (t-s)^{-\omega} e^{-\delta(t-s)} \mathcal{U}(s) \, ds \\ &= J^{1-\omega, \delta} \mathcal{U}(t),\end{aligned}$$

o que prova (4.4). \square

Agora, como destacado anteriormente, utilizaremos a Proposição 4.4 para ampliar o sistema (4.1)-(4.3) em um sistema equivalente, substituindo os amortecimentos fracionários por termos integrais mais tratáveis computacionalmente. Aplicando a Proposição 4.4 com $\omega = \alpha$, $\delta = \eta$ e $\mathcal{U} = u_t$, garantimos a existência de uma função $\varphi_1 : [0, L] \times [0, +\infty] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:

$$\begin{cases} (\varphi_1)_t(x, t, y) + (y^2 + \eta) \varphi_1(x, t, y) = p(y) u_t(x, t); \quad x \in (0, L), \quad t > 0 \text{ e } y \in \mathbb{R}, \\ \varphi_1(x, 0, y) = 0; \quad x \in (0, L) \text{ e } y \in \mathbb{R}, \\ \widetilde{\gamma_1} \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(x, t, y) \, dy = J_t^{1-\alpha, \eta} u_t(x, t), \quad x \in (0, L) \text{ e } t > 0. \end{cases}$$

onde $p(y) = |y|^{\frac{2\alpha-1}{2}}$ e $\widetilde{\gamma_1} = [\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)]^{-1}$.

Além disso, pela relação fundamental (4.7), temos:

$$\gamma_1 \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(t, y) \, dy = c_1 J_t^{1-\alpha, \eta} u_t(t) = c_1 \partial_t^{\alpha, \eta} u(t),$$

onde $\gamma_1 = \frac{c_1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$.

Procedendo de forma análoga para (β, ζ, ϕ_t) e (θ, ξ, ψ_t) , podemos reformular o problema (4.1)-(4.3) no seguinte sistema ampliado equivalente:

$$\begin{aligned} u_{tt} - a u_{xx} - \tau(\phi - u) + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) \, dy &= 0; \quad x \in (0, L) \text{ e } t > 0, \\ (\varphi_1)_t(y) + (y^2 + \eta) \varphi_1(y) - p(y) u_t &= 0; \quad x \in (0, L), \quad t > 0 \text{ e } y \in \mathbb{R}, \\ \rho_1 \phi_{tt} - k(\phi_x + \psi)_x + \tau(\phi - u) + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) \, dy &= 0; \quad x \in (0, L) \text{ e } t > 0, \\ (\varphi_2)_t(y) + (y^2 + \zeta) \varphi_2(y) - q(y) \phi_t &= 0; \quad x \in (0, L), \quad t > 0 \text{ e } y \in \mathbb{R}, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b \psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \gamma_3 \int_{\mathbb{R}} r(y) \varphi_3(y) \, dy &= 0; \quad x \in (0, L) \text{ e } t > 0, \\ (\varphi_3)_t(y) + (y^2 + \xi) \varphi_3(y) - r(y) \psi_t &= 0; \quad x \in (0, L), \quad t > 0 \text{ e } y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

onde $q(y) = |y|^{\frac{2\beta-1}{2}}$, $r(y) = |y|^{\frac{2\theta-1}{2}}$, $\gamma_2 = \frac{c_2}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}$ e $\gamma_3 = \frac{c_3}{\Gamma(\theta)\Gamma(1-\theta)}$.

O sistema (4.12) está sujeito aos seguintes dados iniciais:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x); \quad x \in (0, L), \\ \phi(x, 0) &= \phi_0(x), \quad \phi_t(x, 0) = \phi_1(x); \quad x \in (0, L), \\ \psi(x, 0) &= \psi_0(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi_1(x); \quad x \in (0, L), \\ \varphi_1(x, 0, y) &= \varphi_2(x, 0, y) = \varphi_3(x, 0, y) = 0; \quad x \in [0, L] \text{ e } y \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

e às condições de contorno de Dirichlet-Dirichlet-Neumann:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(L, t) = 0; \quad t \geq 0, \\ \phi(0, t) &= \phi(L, t) = 0; \quad t \geq 0, \\ \psi_x(0, t) &= \psi_x(L, t) = 0; \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Para finalizar esta seção, apresentaremos alguns lemas técnicos que serão utilizados nas estimativas das próximas seções, onde estudaremos a boa-colocação e a estabilidade do semigrupo associado ao problema ampliado (4.12)–(4.14).

Lema 4.5

Seja $0 < \omega < 1$ e sejam $\delta, \lambda \in \mathbb{R}$ tais que $\delta \geq 0$ e $\lambda > -\delta$. Então

$$C(\omega, \delta, \lambda) := \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{2\omega-1}}{y^2 + \delta + \lambda} dy = C_1 (\delta + \lambda)^{\omega-1} < +\infty.$$

e

$$D(\omega, \delta, \lambda) := \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{2\omega-1}}{(y^2 + \delta + \lambda)^2} dy = C_2 (\delta + \lambda)^{\omega-2} < +\infty.$$

Além disso, para $h_j \in L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))$ ($j = 1, 2, 3$), temos:

$$H_j(x, \omega, \delta, \lambda) := \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{\frac{2\omega-1}{2}} h_j(x, y)}{y^2 + \delta + \lambda} dy \in L^2(0, L).$$

Demonstração. Primeiro, note que:

$$C(\omega, \delta, \lambda) := \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{2\omega-1}}{y^2 + \delta + \lambda} dy = \frac{2}{\delta + \lambda} \int_0^{+\infty} \frac{|y|^{2\omega-1}}{\frac{y^2}{\delta + \lambda} + 1} dy.$$

Fazendo a mudança de variável $\sigma = \frac{y^2}{\delta + \lambda} + 1$, obtemos $|y| = (\sigma - 1)^{1/2}(\delta + \lambda)^{1/2}$, e portanto

$$\begin{aligned} C(\omega, \delta, \lambda) &= \frac{2}{\delta + \lambda} \int_1^{+\infty} \frac{(\sigma - 1)^{\omega-1/2}(\delta + \lambda)^{\omega-1/2}}{\sigma} \frac{1}{2}(\delta + \lambda)^{1/2}(\sigma - 1)^{-1/2} d\sigma \\ &= \frac{1}{(\delta + \lambda)^{1-\omega}} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sigma(\sigma - 1)^{1-\omega}} d\sigma. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Para mostrar que a integral em (4.15) é de fato finita, observe que, para σ suficientemente grande, vale:

$$\frac{1}{\sigma(\sigma - 1)^{1-\omega}} \leq \frac{1}{\sigma^{1+\omega}} \tag{4.16}$$

De fato, multiplicando ambos os lados da desigualdade (4.16) por $\sigma\sigma^{1+\omega} = \sigma^{2+\omega}$, temos:

$$\frac{\sigma\sigma^{1+\omega}}{\sigma(\sigma - 1)^{1-\omega}} \leq \frac{\sigma^{2+\omega}}{\sigma^{1+\omega}} = \sigma.$$

Assim

$$\frac{1}{\sigma(\sigma-1)^{1-\omega}} \leq \frac{1}{\sigma^{1+\omega}} \iff \frac{\sigma^\omega}{(\sigma-1)^{1-\omega}} \leq 1.$$

Considerando σ suficientemente grande, de tal modo que $\sigma^2 > 3\sigma - 1$, temos $\sigma - 1 > \frac{\sigma}{\sigma-1} > 1$. Como $0 < \omega < 1$, temos

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma-1}\right)^\omega < \frac{\sigma}{\sigma-1} < \sigma - 1.$$

Portanto $\sigma^\omega < (\sigma-1)^{1-\omega}$, o que prova (4.16). Assim:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{d\sigma}{\sigma(\sigma-1)^{1-\omega}} &\leq \int_1^N \frac{d\sigma}{\sigma(\sigma-1)^{1-\omega}} + \int_N^{+\infty} \frac{d\sigma}{\sigma^{1+\omega}} \\ &= K + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_N^t \frac{d\sigma}{\sigma^{1+\omega}} = K + \frac{1}{\omega N^{-\omega}} := C_1, \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde K e N são constantes.

Assim, de (4.15) e (4.17) concluímos que $C(\omega, \delta, \lambda) = C_1(\delta + \lambda)^{\omega-1} < \infty$.

Para majorar a integral $D(\omega, \delta, \lambda)$ fazemos a seguinte mudança de variável:

$$\sigma = \frac{y^4}{(\delta + \lambda)^2} + 2 \frac{y^2}{\delta + \lambda} + 1.$$

Desse modo $y^4 + 2(\delta + \lambda)y^2 - (\sigma - 1)(\delta + \lambda)^2 = 0$, e portanto:

$$|y| = (\delta + \lambda)^{1/2} (\sigma^{1/2} - 1)^{1/2}.$$

Portanto, de maneira similar, obtemos:

$$\begin{aligned} D(\omega, \delta, \lambda) &= \frac{2}{(\delta + \lambda)^2} \int_0^{+\infty} \frac{|y|^{2\omega-1}}{\frac{y^4}{(\delta + \lambda)^2} + 2 \frac{y^2}{\delta + \lambda} + 1} dy \\ &= \frac{1}{2(\delta + \lambda)^{2-\omega}} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sigma^{3/2} (\sigma^{1/2} - 1)^{1-\omega}} d\sigma \\ &\leq C_2(\delta + \lambda)^{\omega-2} < \infty. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Por fim, a partir da desigualdade de Cauchy-Schwarz (Proposição A.8) e do fato de que $h_j \in L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))$, segue-se que:

$$\begin{aligned} H_j(\omega, \delta, \lambda) := \int_0^L |H_j(x, \omega, \delta, \lambda)|^2 dx &\leq \int_0^L \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{2\omega-1}}{y^2 + \delta + \lambda} |h_j(x, y)| dy \right|^2 dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{2\omega-1} dy}{(y^2 + \delta + \lambda)^2} \right) \int_0^L \int_{\mathbb{R}} |h_j(x, y)|^2 dy dx \\ &= D(\omega, \delta, \lambda) \|h_j\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))}^2 < \infty. \end{aligned}$$

□

Lema 4.6

Sejam $0 < \omega < 1$ e $\delta, \lambda \in \mathbb{R}$ tais que $\delta \geq 0$ e $\lambda \neq 0$. Então

$$C(\omega, \delta, \lambda i) := \int_{\mathbb{R}} \frac{y^{2\omega-1} dy}{y^2 + \delta + \lambda i} = C_1 (\delta + \lambda i)^{\omega-1},$$

e dado $h_j \in L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))$ ($j = 1, 2, 3$), temos:

$$H_j(x, \omega, \delta, \lambda i) := \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{\frac{2\omega-1}{2}} h_j(x, y) dy}{y^2 + \delta + \lambda i} \in L^2(0, L).$$

Demonação. Considere a função $F_\delta : D_\delta \rightarrow \mathbb{C}$, defina por:

$$F_\delta(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{y^{2\omega-1} dy}{y^2 + \delta + z},$$

onde $D_\delta = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > -\delta \text{ ou } \operatorname{Im} z \neq 0\}$.

Note que:

$$\left| \frac{|y|^{2\omega-1}}{y^2 + \delta + z} \right| \leq \frac{|y|^{2\omega-1}}{y^2 + \delta + \operatorname{Re} z} \quad \text{e} \quad \left| \frac{|y|^{2\omega-1}}{y^2 + \delta + z} \right| \leq \frac{|y|^{2\omega-1}}{y^2 + \delta + |\operatorname{Im} z|}.$$

Então:

$$\left| \frac{|y|^{2\omega-1}}{y^2 + \delta + z} \right| \leq \frac{|y|^{2\omega-1}}{y^2 + \delta + \delta_0} \quad \text{e} \quad \left| \frac{|y|^{2\omega-1}}{y^2 + \delta + z} \right| \leq \frac{|y|^{2\omega-1}}{y^2 + \delta_1}. \quad (4.19)$$

onde $\operatorname{Re} z \geq \delta_0 > -\delta$ e $|\operatorname{Im} z| \geq \delta_1 > 0$.

Portanto, de (4.19), segue que a função $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f_\lambda(y) = \frac{|y|^{2\omega-1}}{y^2 + \delta + z}$ é integrável, e portanto F_δ é holomorfa em D_δ para todo $\delta \geq 0$.

Agora, considere a função $G_\delta : D_\delta \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $G_\delta(z) = C_1 (\delta + z)^{\omega-1}$. Do Princípio do zeros isolados (Teorema A.12), se a função holomorfa $H = F - G$ é não-constante, então existe uma vizinhança $V \subset D$ e um único ponto $z_0 \in V$ tal que $H(z_0) = F_\delta(z_0) - G_\delta(z_0) = 0$. Contudo do Lema 4.5, segue que:

$$F_\delta(\lambda) = C(\omega, \delta, \lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{y^{2\omega-1} dy}{y^2 + \delta + \lambda} = C_1 (\delta + \lambda)^{\omega-1} = G_\delta(\lambda); \quad \forall \lambda > -\delta.$$

Assim, $H(\lambda) = 0$, para todo $\lambda > -\delta$, e portanto H deve ser constante igual a 0 em todo intervalo $(-\delta, +\infty) \cap V$. Da continuidade de H em D , segue que $F = G$.

Em particular, temos:

$$C(\omega, \delta, \lambda i) := \int_{\mathbb{R}} \frac{y^{2\omega-1} dy}{y^2 + \delta + \lambda i} = F(\lambda i) = G(\lambda i) = C_1 (\delta + \lambda i)^{\omega-1}; \quad \forall \lambda \neq 0 \text{ e } \delta \geq 0.$$

Além disso, da desigualdade de Cauchy-Schwarz (Proposição A.8) e do fato de $h_j \in L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))$, segue-se que:

$$\begin{aligned} H_j(\omega, \delta, \lambda i) &:= \int_0^L |H_j(x, \omega, \delta, \lambda i)|^2 dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{2\omega-1} dy}{(y^2 + \delta)^2 + \lambda^2} \right) \int_0^L \int_{\mathbb{R}} |h_j(x, y)|^2 dy dx < +\infty. \end{aligned}$$

De fato. Definindo:

$$E(\omega, \delta, \lambda) := \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{2\omega-1} dy}{(y^2 + \delta^2 + \lambda^2)} = 2 \int_0^1 \frac{|y|^{2\omega-1} dy}{(y^2 + \delta^2 + \lambda^2)} + 2 \int_1^{+\infty} \frac{|y|^{2\omega-1} dy}{(y^2 + \omega^2 + \lambda^2)} < \infty,$$

observe que em ambos os casos, ($\delta > 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$) ou ($\delta = 0$ e $\lambda \neq 0$), obtemos

$$\frac{|y|^{2\omega-1}}{(y^2 + \delta^2 + \lambda^2)} \sim \frac{|y|^{2\omega-1}}{\delta^2 + \lambda^2} \text{ quando } |y| \rightarrow 0, \quad (4.20)$$

e

$$\frac{|y|^{2\omega-1}}{(y^2 + \delta^2 + \lambda^2)} \sim \frac{|y|^{2\omega-1}}{y^4} = \frac{1}{|y|^{5-2\omega}} \text{ quando } |y| \rightarrow +\infty. \quad (4.21)$$

Lembre que uma função do tipo $|y|^d$ pode possuir uma singularidade em $y = 0$. Lembre que $\int_{-k}^k |y|^d dy < \infty$, quando $d > -1$ e $\int_{-\infty}^{-k} |y|^d dy, \int_k^{+\infty} |y|^d dy < \infty$, quando $d < -1$. Assim, como $0 < \omega < 1$, de (4.20) e (4.21), segue que $E(\omega, \delta, \lambda) < \infty$, e consequentemente, $H_j(\omega, \delta, \lambda i) < \infty$. \square

4.2 Boa-Colocação

Nesta seção, deduziremos a energia associada ao problema descrito pelas equações (4.12)–(4.14) e provaremos que essa energia é decrescente no tempo, o que evidencia o caráter dissipativo do sistema. Em seguida, definiremos um operador linear adequado, de modo que o problema possa ser reformulado como um problema de Cauchy linear associado a esse operador. Além disso, utilizaremos a expressão da energia obtida para definir o espaço de fase, isto é, o espaço no qual o operador está definido. Esse espaço será essencial para a análise das propriedades do sistema.

Por fim, aplicaremos a teoria dos semigrupos de operadores lineares limitados, desenvolvida no Capítulo 2, para demonstrar que o problema está bem colocado. Isso implica que existe uma única solução que satisfaz as equações (4.12)–(4.14), garantindo a existência e a unicidade de solução.

4.2.1 Formulação do Semigrupo

Proposição 4.7

A energia associada ao problema (4.12)–(4.14) é dada por:

$$\begin{aligned} E(t) = & \frac{a}{2} \int_0^L |u_x(x, t)|^2 dx + \frac{\tau}{2} \int_0^L |(\phi - u)(x, t)|^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^L |(\phi_x + \psi)(x, t)|^2 dx \\ & + \frac{b}{2} \int_0^L |\psi_x(x, t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L |u_t(x, t)|^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \int_0^L |\phi_t(t)|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \int_0^L |\psi_t(x, t)|^2 dx \\ & + \frac{\gamma_1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^L |\varphi_1(x, t, y)|^2 dx dy + \frac{\gamma_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^L |\varphi_2(x, t, y)|^2 dx dy + \frac{\gamma_3}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^L |\varphi_3(x, t, y)|^2 dx dy, \end{aligned} \quad (4.22)$$

e satisfaz:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) = & -\gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (y^2 + \eta) |\varphi_1(x, t, y)|^2 dx dy - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (y^2 + \zeta) |\varphi_2(x, t, y)|^2 dx dy \\ & - \gamma_3 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (y^2 + \theta) |\varphi_3(x, t, y)|^2 dx dy. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (4.12)₁ por u_t e integrando em relação a x no intervalo de 0 a L , obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^L u_{tt} u_t \, dx - a u_x u_t \Big|_{x=0}^{x=L} + a \int_0^L u_x u_{tx} \, dx - \tau \int_0^L (\phi - u) u_t \, dx \\ & + \gamma_1 \int_0^L u_t \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) \, dy \, dx = 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Note que

$$u_t(0, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0, t+h) - u(0, t)}{h} \quad \text{e} \quad u_t(L, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(L, t+h) - u(L, t)}{h}$$

Assim, das condições de contorno (4.14)₁, segue que $u_t(0, t) = u_t(L, t) = 0$, e portanto:

$$a u_x u_t \Big|_{x=0}^{x=L} := a u_x(0, t) u_t(0, t) - a u_x(L, t) u_t(L, t) = 0. \quad (4.25)$$

Como $\frac{d}{dt} |u_t|^2 = 2 u_{tt} u_t$ e $\frac{d}{dt} |u_x|^2 = 2 u_x u_{xt} = 2 u_x u_{tx}$, de (4.24) e (4.25), obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_t|^2 \, dx + \frac{a}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_x|^2 \, dx - \tau \int_0^L (\phi - u) u_t \, dx + \gamma_1 \int_0^L u_t \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) \, dy \, dx = 0 \quad (4.26)$$

Multiplicando as equações (4.12)₃ e (4.12)₅ por ϕ_t e ψ_t respectivamente, e agindo de maneira semelhante, obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\phi_t|^2 \, dx + k \int_0^L (\phi_x + \psi) \phi_{xt} \, dx + \tau \int_0^L (\phi - u) \phi_t \, dx \\ & + \gamma_2 \int_0^L \phi_t \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) \, dy \, dx = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx + k \int_0^L (\phi_x + \psi) \psi_t \, dx \\ & + \gamma_3 \int_0^L \psi_t \int_{\mathbb{R}} r(y) \varphi_3(y) \, dy \, dx = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Somando (4.26), (4.27) e (4.28), e observando que

$$\frac{d}{dt} |\phi - u|^2 = 2[\phi - u][\phi_t - u_t] = 2[\phi - u]\phi_t - 2[\phi_t - u]u_t$$

e

$$\frac{d}{dt} |\phi_x + \psi|^2 = 2[\phi_x + \psi][\phi_{xt} + \psi_t] = 2[\phi_x + \psi]\phi_{xt} + 2[\phi_x + \psi]\psi_t,$$

segue que

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_x|^2 \, dx + \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\phi - u|^2 \, dx + \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\phi_x + \psi|^2 \, dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\psi_x|^2 \, dx \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_t|^2 \, dx + \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\phi_t|^2 \, dx + \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\psi_t|^2 \, dx + \gamma_1 \int_0^L u_t \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) \, dy \, dx \\ & + \gamma_2 \int_0^L \phi_t \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) \, dy \, dx + \gamma_3 \int_0^L \psi_t \int_{\mathbb{R}} r(y) \varphi_3(y) \, dy \, dx = 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Por outro lado, ao multiplicar as equações (4.12)₂, (4.12)₄ e (4.12)₆ por $\gamma_1\varphi_1$, $\gamma_2\varphi_2$ e $\gamma_3\varphi_3$ respectivamente e, em seguida, integrar com respeito a variável y sobre \mathbb{R} , obtemos:

$$\frac{\gamma_1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |\varphi_1(y)|^2 dy + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dy = \gamma_1 u_t \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy, \quad (4.30)$$

$$\frac{\gamma_2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |\varphi_2(y)|^2 dy + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) |\varphi_2(y)|^2 dy = \gamma_2 \phi_t \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) dy \quad (4.31)$$

e

$$\frac{\gamma_3}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |\varphi_3(y)|^2 dy + \gamma_3 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \xi) |\varphi_3(y)|^2 dy = \gamma_3 \psi_t \int_{\mathbb{R}} r(y) \varphi_3(y) dy. \quad (4.32)$$

Substituindo as expressões (4.30), (4.31) e (4.32) em (4.29), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_x|^2 dx + \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\phi - u|^2 dx + \frac{k}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\phi_x + \psi|^2 dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\psi_x|^2 dx \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |u_t|^2 dx + \frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\phi_t|^2 dx + \frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{\gamma_1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \int_0^L |\varphi_1(y)|^2 dx dy \\ & + \frac{\gamma_2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \int_0^L |\varphi_2(y)|^2 dx dy + \frac{\gamma_3}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \int_0^L |\varphi_3(y)|^2 dx dy + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dx dy \\ & + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (y^2 + \zeta) |\varphi_2(y)|^2 dx dy + \gamma_3 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (y^2 + \xi) |\varphi_3(y)|^2 dx dy = 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Denotando a energia $E(t)$ por (4.22), temos que (4.33) estabelece (4.23). \square

Queremos agora reescrever o problema (4.12)–(4.14) como um problema abstrato de Cauchy linear. Para isso, introduzimos a função vetorial $U = (u, v, \varphi_1, \phi, w, \varphi_2, \psi, z, \varphi_3)$, em que $u_t = v, \phi_t = w$ e $\psi_t = z$.

Assim, temos:

$$U_t = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \\ (\varphi_1)_t \\ \phi_t \\ w_t \\ (\varphi_2)_t \\ \psi_t \\ z_t \\ (\varphi_3)_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ au_{xx} + \tau(\phi - u) - \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy \\ -(y^2 + \eta) \varphi_1(y) + p(y) v \\ w \\ \frac{1}{\rho_1} [k(\phi_x + \psi)_x - \tau(\phi - u) - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) dy] \\ -(y^2 + \zeta) \varphi_2(y) + q(y) w \\ z \\ \frac{1}{\rho_2} [b\psi_{xx} - k(\phi_x + \psi) - \gamma_3 \int_{\mathbb{R}} r(y) \varphi_3(y) dy] \\ -(y^2 + \xi) \varphi_3(y) + r(y) z \end{pmatrix} := \mathcal{A}U. \quad (4.34)$$

Nosso objetivo é reescrever o problema (4.12)–(4.14) em um problema de Cauchy abstrato da seguinte forma:

$$\begin{cases} U'(t) - \mathcal{A}U(t) = 0; \quad t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (4.35)$$

onde $U_0 = (u_0, u_1, 0, \phi_0, \phi_1, 0, \psi_0, \psi_1, 0)$ e o operador linear $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é definido conforme (4.34), para um espaço de fase \mathcal{H} apropriado.

Para determinar o espaço de fase adequado \mathcal{H} , podemos observar a expressão da energia $E(t)$ definida em (4.23). De acordo com a teoria de semigrupos lineares apresentada no Capítulo 2 (ver Definição 2.34), precisamos garantir que:

$$E(t) = \frac{1}{2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2} \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (4.36)$$

onde $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ representa o semigrupo de operadores lineares limitados gerado pelo operador linear \mathcal{A} .

De acordo com as condições de Dirichlet (4.14)_{1,2}, uma vez que, pelo Teorema do Traço (Teorema 1.63), tem-se:

$$H_0^1(0, L) = \{u \in H^1(0, L); u(0) = u(L) = 0\}.$$

Assim, é natural considerar a norma do espaço $H_0^1(0, L)$ (ver Corolário 1.18), definida por:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{H_0^1(0, L)} : H_0^1(0, L) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ u &\longmapsto \|u\|_{H_0^1(0, L)} = \|u_x\|_{L^2(0, L)}. \end{aligned}$$

Por outro lado, para as condições de Neumann (4.14)₁, não há um espaço normado natural como $H_0^1(0, L)$. Contudo, o termo $\|\psi_x\|_{L^2(0, L)}$ aparece naturalmente na expressão da Energia $E(t)$. Diante disso, seria fundamental considerar um espaço onde valha a desigualdade de Poicaré, mas sem que $\psi \in H_0^1(0, L)$, ou seja, sem a necessidade de impor, além das condições de contorno de Neumann, as condições de Dirichlet para ψ .

Observe que, se assumirmos a condição:

$$\int_0^L \psi(x) dx = 0, \quad (4.37)$$

dispomos da Desigualdade de Poincaré (Teorema 1.17). Com efeito, pela desigualdade de Poincaré-Wirtinger (Teorema 1.22), segue que:

$$\left\| \psi - \frac{1}{L} \int_0^L \psi(x) dx \right\|_{L^2(0, L)} \leq 2L \|\psi_x\|_{L^2(0, L)}.$$

Assim, da condição (4.37), tem-se:

$$\|\psi\|_{L^2(0, L)} \leq 2L \|\psi_x\|_{L^2(0, L)}, \quad (4.38)$$

Considere o espaço:

$$H_*^1 = \left\{ f \in H^1(0, L); \int_0^L f(x) dx = 0 \right\}.$$

Dessa forma, a partir da desigualdade (4.38), define-se a seguinte norma:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{H_*^1(0, L)} : H_*^1(0, L) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ u &\longmapsto \|u\|_{H_*^1(0, L)} = \|u_x\|_{L^2(0, L)}. \end{aligned}$$

Afirmamos que $\left(H_*^1(0, L); \|\cdot\|_{H_*^1(0, L)}\right)$ é um espaço de Banach. De fato, note que $H_*^1(0, L) = H^1(0, L) \cap L_*^2(0, L)$, onde

$$L_*^2(0, L) = \left\{ f \in L^2(0, L); \int_0^L f(x) dx = 0 \right\}.$$

Assim, basta mostrar que $L_*^2(0, L)$ é subespaço fechado de $L^2(0, L)$. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $L_*^2(0, L)$. Logo $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(0, L)$, e, como $L^2(0, L)$ é um espaço de Banach, existe uma função $f \in L^2(0, L)$ tal que $\|f_n - f\|_{L^2(0, L)} \rightarrow 0$. Da imersão contínua $L^2(0, L) \hookrightarrow L^1(0, L)$, temos $\|f_n - f\|_{L^1(0, L)} \rightarrow 0$. Portanto:

$$\left| \int_0^L f(x) dx \right| = \left| \int_0^L f_n(x) dx - \int_0^L f(x) dx \right| \leq \left| \int_0^L (f_n(x) - f(x)) dx \right| = \|f_n - f\|_{L^1(0, L)} \rightarrow 0.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtém-se $\int_0^L f(x) dx = 0$, isto é $f \in L_*^2(0, L)$. Logo $L_*^2(0, L)$ é fechado em $L^2(0, L)$, e, portanto $H_*^1(0, L)$ é um espaço de Banach, como afirmado.

Assim, o espaço de fase $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ é definido por:

$$\mathcal{H} = [H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))]^2 \times [H_*^1(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))],$$

sendo munido da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, definida em (4.36).

Para simplificar a notação, denotaremos a norma e o produto interno do espaço $L^2(0, L)$ simplesmente como $\|\cdot\|$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ respectivamente. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= a\|u_x\|^2 + \|v\|^2 + \rho_1\|w\|^2 + \rho_2\|z\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \tau\|\phi - u\|^2 + k\|\phi_x + \psi\|^2 \\ &\quad + \gamma_1\|\varphi_1\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))}^2 + \gamma_2\|\varphi_2\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))}^2 + \gamma_3\|\varphi_3\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))}^2, \end{aligned}$$

Na Definição 2.4, vimos que $U \in D(\mathcal{A})$, se, e somente se $\mathcal{A}U \in \mathcal{H}$. Além disso, a condição de fronteira (4.14)₃ deve ser satisfeita. Assim, o domínio de \mathcal{A} é dado por:

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ (u, v, \varphi_1, \phi, w, \varphi_2, \psi, z, \varphi_3) \left| \begin{array}{l} u, \phi \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), \\ \psi \in H_N^2(0, L) \cap H_*^1(0, L), \\ v, w \in H_0^1(0, L) \\ z \in H_*^1(0, L) \\ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L)), \\ |y|\varphi_j \in L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L)) (j = 1, 2, 3), \\ -(|y|^2 + \eta)\varphi_1 + p(y)v \in L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L)), \\ -(|y|^2 + \zeta)\varphi_2 + q(y)w \in L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L)), \\ -(|y|^2 + \xi)\varphi_3 + r(y)z \in L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L)). \end{array} \right. \right\},$$

onde $H_N^2(0, L) := \{\psi \in H^2(0, L); \psi_x(0) = \psi_x(L) = 0\}$.

Observe que $D(\mathcal{A})$ é denso em \mathcal{H} . Além disso, $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ é um espaço de Hilbert, com $\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle U, U \rangle_{\mathcal{H}}$, onde

$$\begin{aligned} \langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} &= a\langle u_x, \tilde{u}_x \rangle + \langle v, \tilde{v} \rangle + \rho_1\langle w, \tilde{w} \rangle + \rho_2\langle z, \tilde{z} \rangle + b\langle \psi_x, \tilde{\psi}_x \rangle + \tau\langle \phi - u, \tilde{\phi} - \tilde{u} \rangle \\ &\quad + k\langle \phi_x + \psi, \tilde{\phi}_x + \tilde{\psi} \rangle + \gamma_1\langle \varphi_1, \tilde{\varphi}_1 \rangle_{L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))} + \gamma_2\langle \varphi_2, \tilde{\varphi}_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))} \\ &\quad + \gamma_3\langle \varphi_3, \tilde{\varphi}_3 \rangle_{L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))}, \end{aligned}$$

para $U = (u, v, \varphi_1, \phi, w, \varphi_2, \psi, z, \varphi_3)$ e $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\varphi_1}, \tilde{\phi}, \tilde{w}, \tilde{\varphi_2}, \tilde{\psi}, \tilde{z}, \tilde{\varphi_3})$.

4.2.2 Existência e Unicidade de Solução

Teorema 4.8 (Teorema de Existência e Unicidade)

Se $U_0 = (u_0, u_1, 0, \phi_0, \phi_1, 0, \psi_0, \psi_1, 0) \in \mathcal{H}$, então o problema de Cauchy (4.35) admite uma única solução branda (ver Definição 2.9, item (i)):

$$U \in C^0([0, +\infty); \mathcal{H}), \quad (4.39)$$

dada por $U(t) = e^{t\mathcal{A}} U_0$.

Se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então a solução obtida é uma solução regular (Clássica) (ver Definição 2.9, item (ii)) com a seguinte regularidade:

$$U \in C^0([0, +\infty); D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, +\infty); \mathcal{H}). \quad (4.40)$$

Demonstração. Dado o Teorema 2.8, é suficiente mostrar que o operador $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$. Para isso, utilizaremos o item (i) do Teorema de Lummer-Phillips (Teorema (2.31)).

Inicialmente, afirmamos que o operador \mathcal{A} é dissipativo (ver Definição 2.30). Para verificar essa propriedade, seja $U = (u, v, \varphi_1, \phi, w, \varphi_2, \psi, z, \varphi_3) \in D(\mathcal{A})$. Temos:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= a \int_0^L v_x \bar{u}_x \, dx + a \int_0^L u_{xx} \bar{v} \, dx + \tau \int_0^L (\phi - u) \bar{v} \, dx - \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L p(y) \varphi_1(y) \bar{v} \, dx \, dy \\ &\quad + k \int_0^L (\phi_x + \psi)_x \bar{w} \, dx - \tau \int_0^L (\phi - u) \bar{w} \, dx - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L q(y) \varphi_2(y) \bar{w} \, dx \, dy \\ &\quad + b \int_0^L \psi_{xx} \bar{z} \, dx - k \int_0^L (\phi_x + \psi) \bar{z} \, dx - \gamma_3 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L r(y) \varphi_3(y) \bar{z} \, dx \, dy \\ &\quad + b \int_0^L z_x \bar{\psi}_x \, dx + \tau \int_0^L (w - v) \bar{(\phi - u)} \, dx + k \int_0^L (w_x + z) \bar{(\phi_x + \psi)} \, dx \\ &\quad - \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 \, dx \, dy + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L p(y) \bar{\varphi_1(y)} v \, dx \, dy \\ &\quad - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (y^2 + \zeta) |\varphi_2(y)|^2 \, dx \, dy + \gamma_2 \int_0^L q(y) \bar{\varphi_2(y)} w \, dx \, dy \\ &\quad - \gamma_3 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (y^2 + \xi) |\varphi_3(y)|^2 \, dx \, dy + \gamma_3 \int_0^L r(y) \bar{\varphi_3(y)} z \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Como $U \in D(\mathcal{A})$, segue que $v, w \in H_0^1(0, L)$. Logo, utilizando integração por partes, temos:

$$\int_0^L u_{xx} \bar{v} \, dx = - \int_0^L u_x \bar{v}_x \, dx \quad \text{e} \quad \int_0^L (\phi_x + \psi)_x \bar{w} \, dx = - \int_0^L (\phi_x + \psi) \bar{w}_x \, dx.$$

Simplificando os termos semelhantes, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= a \int_0^L [v_x \overline{u_x} - \overline{v_x u_x}] dx + \tau \int_0^L [(w - v) \overline{(\phi - u)} - \overline{(w - v) (\phi - u)}] dx \\
 &\quad + k \int_0^L [(w_x + z) \overline{(\phi_x + \psi)} - \overline{(w_x + z) (\phi_x + \psi)}] dx + b \int_0^L [z_x \overline{\psi_x} - \overline{z_x \psi_x}] dx \\
 &\quad + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L p(y) [v \overline{\varphi_1(y)} - \overline{v \varphi_1(y)}] dx dy - \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dx dy \\
 &\quad + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L q(y) [w \overline{\varphi_2(y)} - \overline{w \varphi_2(y)}] dx dy - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (y^2 + \zeta) |\varphi_2(y)|^2 dx dy \\
 &\quad + \gamma_3 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L r(y) [z \overline{\varphi_3(y)} - \overline{z \varphi_3(y)}] dx dy - \gamma_3 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (y^2 + \xi) |\varphi_3(y)|^2 dx dy.
 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= 2ia \int_0^L \text{Im}[v_x \overline{u_x}] dx + 2i\tau \int_0^L \text{Im}[(w - v) \overline{(\phi - u)}] dx \\
 &\quad + 2ik \int_0^L \text{Im}[(w_x + z) \overline{(\phi_x + \psi)}] dx + 2ib \int_0^L \text{Im}[z_x \overline{\psi_x}] dx \\
 &\quad + 2i\gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L p(y) \text{Im}[v \overline{\varphi_1(y)}] dx dy - \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dx dy \\
 &\quad + 2i\gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L q(y) \text{Im}[w \overline{\varphi_2(y)}] dx dy - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (y^2 + \zeta) |\varphi_2(y)|^2 dx dy \\
 &\quad + 2i\gamma_3 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L r(y) \text{Im}[z \overline{\varphi_3(y)}] dx dy - \gamma_3 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (y^2 + \xi) |\varphi_3(y)|^2 dx dy.
 \end{aligned}$$

Finalmente, tomindo a parte real, temos:

$$\begin{aligned}
 \text{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= -\gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dx dy - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (y^2 + \zeta) |\varphi_2(y)|^2 dx dy \\
 &\quad - \gamma_3 \int_{\mathbb{R}} \int_0^L (y^2 + \xi) |\varphi_3(y)|^2 dx dy \leq 0. \tag{4.41}
 \end{aligned}$$

Isso demonstra que o operador \mathcal{A} é dissipativo.

Mostraremos agora que \mathcal{A} é um operador maximal (ver Definição (2.32)). Mais precisamente, devemos provar que, dado $W \in \mathcal{H}$, existe um vetor $U \in D(\mathcal{A})$ tal que $(I - \mathcal{A})U = W$. Isto equivale a resolução do seguinte sistema de equações:

$$u - v = f_1, \tag{4.42}$$

$$v - au_{xx} - \tau(\phi - u) + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy = g_1, \tag{4.43}$$

$$\varphi_1(y) + (y^2 + \eta) \varphi_1(y) - p(y) v = h_1(y), \tag{4.44}$$

$$\phi - w = f_2, \tag{4.45}$$

$$\rho_1 w - k(\phi_x + \psi)_x + \tau(\phi - u) + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) dy = \rho_1 g_2, \tag{4.46}$$

$$\varphi_2(y) + (y^2 + \eta) \varphi_2(y) - q(y) w = h_2(y), \tag{4.47}$$

$$\psi - z = f_3, \tag{4.48}$$

$$\rho_2 z - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \gamma_3 \int_{\mathbb{R}} r(y) \varphi_3(y) dy = \rho_2 g_3, \tag{4.49}$$

$$\varphi_3(y) + (y^2 + \xi) \varphi_3(y) - r(y) z = h_3(y). \tag{4.50}$$

Nesse sistema, $W = (f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, h_2, f_3, g_3, h_3)$ e $U = (u, v, \varphi_1, \phi, w, \varphi_2, \psi, z, \varphi_3)$.

De (4.42), (4.45) e (4.48), segue que:

$$v = u - f_1, \quad w = \phi - f_2 \quad \text{e} \quad z = \psi - f_3. \quad (4.51)$$

Substituindo (4.51) em (4.44), (4.47) e (4.50) respectivamente, obtemos:

$$\varphi_1(y) = \frac{h_1(y)}{y^2 + \eta + 1} - \frac{p(y)f_1}{y^2 + \eta + 1} + \frac{p(y)u}{y^2 + \eta + 1}, \quad (4.52)$$

$$\varphi_2(y) = \frac{h_2(y)}{y^2 + \zeta + 1} - \frac{q(y)f_2}{y^2 + \zeta + 1} + \frac{q(y)\phi}{y^2 + \zeta + 1}, \quad (4.53)$$

$$\varphi_3(y) = \frac{h_3(y)}{y^2 + \xi + 1} - \frac{r(y)f_3}{y^2 + \xi + 1} + \frac{r(y)\psi}{y^2 + \xi + 1}. \quad (4.54)$$

Aplicando o Lema 4.5 às expressões (4.52), (4.53) e (4.54), obtemos:

$$\gamma_1 \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy = \gamma_1 [H_1(x, \alpha, \eta, 1) + C(\alpha, \eta, 1)(u - f_1)], \quad (4.55)$$

$$\gamma_2 \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) dy = \gamma_2 [H_2(x, \beta, \zeta, 1) + C(\beta, \zeta, 1)(\phi - f_2)], \quad (4.56)$$

$$\gamma_3 \int_{\mathbb{R}} r(y) \varphi_3(y) dy = \gamma_3 [H_3(x, \theta, \xi, 1) + C(\theta, \xi, 1)(\psi - f_3)]. \quad (4.57)$$

Aplicando as expressões (4.51), (4.55), (4.56) e (4.57) nas equações (4.43), (4.46) e (4.49) respectivamente, temos:

$$u - au_{xx} - \tau(\phi - u) + \gamma_1 C(\alpha, \eta, 1)u = f_1 + g_1 + \gamma_1 C(\alpha, \eta, 1)f_1 - \gamma_1 H_1(x, \alpha, \eta, 1), \quad (4.58)$$

$$\rho_1 \phi - k(\phi_x + \psi)_x + \tau(\phi - u) + \gamma_2 C(\beta, \zeta, 1)\phi = \rho_1(f_2 + g_2) + \gamma_2 C(\beta, \zeta, 1)f_2 - \gamma_2 H_2(x, \beta, \zeta, 1), \quad (4.59)$$

$$\rho_2 \psi - b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \gamma_3 C(\theta, \xi, 1)\psi = \rho_2(f_3 + g_3) + \gamma_3 C(\theta, \xi, 1)f_3 - \gamma_3 H_3(x, \theta, \xi, 1). \quad (4.60)$$

Multiplicando as equações (4.58), (4.59) e (4.60) por $\bar{u} \in H_0^1(0, L)$, $\bar{\phi} \in H_0^1(0, L)$ e $\bar{\psi} \in H_*^1(0, L)$ respectivamente, integrando sobre x de 0 a L e, em seguida, aplicando a integração por partes, obtém-se o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} C_1 \int_0^L u \bar{u} dx + a \int_0^L u_x \bar{u}_x dx - \tau \int_0^L (\phi - u) \bar{u} dx = \int_0^L F_1 \bar{u} dx, \\ C_2 \int_0^L \phi \bar{\phi} dx + k \int_0^L (\phi_x + \psi) \bar{\phi}_x dx + \tau \int_0^L (\phi - u) \bar{\phi} dx = \int_0^L F_2 \bar{\phi} dx, \\ C_3 \int_0^L \psi \bar{\psi} dx - b \psi_x \bar{\psi}_x \Big|_{x=0}^{x=L} + b \int_0^L \psi_x \bar{\psi}_x dx + k \int_0^L (\phi_x + \psi) \bar{\psi} dx = \int_0^L F_3 \bar{\psi} dx, \end{cases} \quad (4.61)$$

onde os coeficientes são dados por:

$$C_1 = 1 + \gamma_1 C(\alpha, \eta, 1), \quad C_2 = \rho_1 + \gamma_2 C(\beta, \zeta, 1) \quad \text{e} \quad C_3 = \rho_2 + \gamma_3 C(\theta, \xi, 1).$$

e os termos do lado direito são:

$$F_1 = [1 + \gamma_1 C(\alpha, \eta, 1)]f_1 + g_1 - \gamma_1 H_1(x, \alpha, \eta, 1), \quad F_2 = [\rho_1 + \gamma_2 C(\beta, \zeta, 1)]f_2 + \rho_1 g_2 - \gamma_2 H_2(x, \beta, \zeta, 1) \quad \text{e}$$

$$F_3 = [\rho_2 + \gamma_3 C(\theta, \xi, 1)]f_3 + \rho_2 g_3 - \gamma_3 H_3(x, \theta, \xi, 1).$$

Assim, temos que $F_j \in L^2(0, L)$, uma vez que, pelo Lema 4.5, $H_j(x, \omega, \delta, 1) \in L^2(0, L)$.

Observe que não necessariamente se tem:

$$-b\psi_x \overline{\tilde{\psi}_x} \Big|_{x=0}^{x=L} = 0, \quad (4.62)$$

pois nem toda função em $H_*^1(0, L)$ satisfaz as condições de Neumann. Para contornar esse problema, considere o problema variacional auxiliar de encontrar um vetor $(u, \phi, \psi) \in [H_0^1(0, L)]^2 \times H_*^1(0, L)$ tal que

$$\mathcal{B}((u, \phi, \psi), (\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})) = \mathcal{L}(\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}); \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \in [H_0^1(0, L)]^2 \times H_*^1(0, L), \quad (4.63)$$

onde $\mathcal{B} : [(H_0^1(0, L))^2 \times H_*^1(0, L)] \times [(H_0^1(0, L))^2 \times H_*^1(0, L)] \rightarrow \mathbb{C}$ é a forma sesquilinear definida por:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}((u, \phi, \psi), (\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})) &= C_1 \int_0^L u \overline{\tilde{u}} dx + C_2 \int_0^L \phi \overline{\tilde{\phi}} dx + C_3 \int_0^L \psi \overline{\tilde{\psi}} dx + a \int_0^L u_x \overline{\tilde{u}_x} dx \\ &\quad + b \int_0^L \psi_x \overline{\tilde{\psi}_x} dx + \tau \int_0^L (\phi - u) \overline{(\tilde{\phi} - \tilde{u})} dx + k \int_0^L (\phi_x + \psi) \overline{(\tilde{\phi}_x + \tilde{\psi})} dx \end{aligned}$$

e $\mathcal{L} : [H_0^1(0, L)]^2 \times H_*^1(0, L) \rightarrow \mathbb{C}$ é a forma antilinear definida por:

$$\mathcal{L}(\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = \int_0^L F_1 \overline{\tilde{u}} dx + \int_0^L F_2 \overline{\tilde{\phi}} dx + \int_0^L F_3 \overline{\tilde{\psi}} dx.$$

Usaremos o Teorema de Lax-Milgram (Teorema A.9). Primeiramente note que \mathcal{B} é contínua. Dados $(u, \phi, \psi), (\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \in [H_0^1(0, L)]^2 \times H_*^1(0, L)$, da desigualdade de Cauchy-Schwarz (Proposição A.8) e das desigualdade de Poincaré (Teorema 1.17) e Poicaré-Wirtinger (Teorema 1.22), temos:

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}((u, \phi, \psi), (\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}))| &\leq C_1 |\langle u, \tilde{u} \rangle| + C_2 |\langle \phi, \tilde{\phi} \rangle| + C_3 |\langle \psi, \tilde{\psi} \rangle| + a |\langle u_x, \tilde{u}_x \rangle| \\ &\quad + b |\langle \psi_x^*, \tilde{\psi}_x \rangle| + \tau |\langle \phi - u, \tilde{\phi} - \tilde{u} \rangle| + k |\langle \phi_x + \psi, \tilde{\phi}_x + \tilde{\psi} \rangle| \\ &\leq \widetilde{C}_1 \|u_x\| \|\tilde{u}_x\| + \widetilde{C}_2 \|\phi_x\| \|\tilde{\phi}_x\| + \widetilde{C}_3 \|\psi_x\| \|\tilde{\psi}_x\| + T \|\phi_x\| \|\tilde{u}_x\| + T \|u_x\| \|\tilde{\phi}_x\| \\ &\quad + K \|\phi_x\| \|\tilde{\psi}_x\| + K \|\psi_x\| \|\tilde{\phi}_x\| \\ &\leq C \cdot \|(u, \phi, \psi)\|_{[H_0^1(0, L)]^2 \times H_*^1(0, L)} \|(\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})\|_{[H_0^1(0, L)]^2 \times H_*^1(0, L)}, \end{aligned}$$

onde $\widetilde{C}_1 = (C_1 + \tau)L^2 + a$, $\widetilde{C}_2 = (C_2 + \tau)L^2 + k$, $\widetilde{C}_3 = (C_3 + k)L^2 + b$, $T = \tau L^2$, $K = kL$ e $C = \max\{\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \widetilde{C}_3, T, K\}$.

Agora mostraremos que \mathcal{B} é coerciva. Para $(u, \phi, \psi) \in [H_0^1(0, L)]^2 \times H_*^1(0, L)$, da desigualdade de Young (Proposição A.3), segue que:

$$\begin{aligned} \|(u, \phi, \psi)\|_{[H_0^1(0, L)]^2 \times H_*^1(0, L)}^2 &= (\|u_x\| + \|\phi_x\| + \|\psi_x\|)^2 \\ &\leq (\|u_x\| + \|\phi_x + \psi\| + \|\psi\| + \|\psi_x\|)^2 \\ &\leq 4\|u_x\|^2 + 4\|\phi_x + \psi\|^2 + 4\|\psi\|^2 + 4\|\psi_x\|^2 \\ &\leq C_1 \|u\|^2 + C_2 \|\phi\|^2 + \frac{4}{C_3} C_3 \|\psi\|^2 + \frac{4}{a} a \|u_x\|^2 + \frac{4}{b} b \|\psi_x\|^2 + \tau \|\phi - u\|^2 \\ &\quad + \frac{4}{k} k \|\phi_x + \psi\|^2 \\ &\leq C \cdot \mathcal{B}((u, \phi, \psi), (u, \phi, \psi)) \end{aligned}$$

onde $C = \max\{C_1, C_2, 4/C_3, 4/a, 4/b, \tau, 4/k\}$.

Por fim, vamos demonstrar que \mathcal{L} é limitada. Para $(\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \in [H_0^1(0, L)]^2 \times H_*^1(0, L)$, temos:

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})| &= |\langle F_1, \tilde{u} \rangle| + |\langle F_2, \tilde{\phi} \rangle| + |\langle F_3, \tilde{\psi} \rangle| \\ &\leq L\|F_1\|\|\tilde{u}_x\| + L\|F_2\|\|\tilde{\phi}_x\| + L\|F_3\|\|\tilde{\psi}_x\| \\ &\leq C \cdot \|(u, \phi, \psi)\|_{[H_0^1(0, L)]^2 \times H_*^1(0, L)}^2, \end{aligned}$$

onde $C = L \cdot \max\{\|F_1\|, \|F_2\|, \|F_3\|\}$.

Portanto, do Teorema de Lax-Milgram (Teorema A.9), existe uma única solução $(u, \phi, \psi) \in [H_0^1(0, L)]^2 \times H_*^1(0, L)$ para o problema variacional (4.63).

Como $g_1, g_2, g_3 \in L^2(0, L)$, pela regularidade do sistema de equações: (4.43), (4.46) e (4.49), segue que $u, \phi, \psi \in H^2(0, L)$. Além disso, como $f_1, f_2 \in H_0^1(0, L)$ e $f_3 \in H_*^1(0, L)$, definindo v, w e z como as expressões dadas em (4.51), temos que $v, w \in H_0^1(0, L)$ e $z \in H_*^1(0, L)$. Por outro lado, $h_1, h_2, h_3 \in L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))$. Assim, definindo $\varphi_1(y), \varphi_2(y)$ e $\varphi_3(y)$ pelas respectivas expressões dadas em (4.52), (4.53) e (4.54), é evidente que $|y|\varphi_1 \in L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))$, $|y|\varphi_2 \in L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))$, $|y|\varphi_3 \in L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))$, $-(y^2 + \eta)\varphi_1 + p(y)v \in L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))$, $-(y^2 + \zeta)\varphi_2 + q(y)w \in L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))$ e $-(y^2 + \xi)\varphi_3 + r(y)z \in L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))$.

Assim, para que $U = (u, v, \varphi_1, \phi, w, \varphi_2, \psi, z, \varphi_3) \in D(\mathcal{A})$, resta apenas mostrar que ψ satisfaz as condições de Neumann. Note que o problema variacional (4.63) é equivalente ao sistema (4.61), quando supomos (4.62). Portanto, a solução $(u, \phi, \psi) \in [H_0^1(0, L)]^2 \times H_*^1(0, L)$ do problema variacional (4.63) satisfaz:

$$\begin{cases} C_1 \int_0^L u \bar{\tilde{u}} dx + a \int_0^L u_x \bar{\tilde{u}_x} dx - \tau \int_0^L (\phi - u) \bar{\tilde{u}} dx = \int_0^L F_1 \bar{\tilde{u}} dx, \\ C_2 \int_0^L \phi \bar{\tilde{\phi}} dx + k \int_0^L (\phi_x + \psi) \bar{\tilde{\phi}_x} dx + \tau \int_0^L (\phi - u) \bar{\tilde{\phi}} dx = \int_0^L F_2 \bar{\tilde{\phi}} dx, \\ C_3 \int_0^L \psi \bar{\tilde{\psi}} dx + b \int_0^L \psi_x \bar{\tilde{\psi}_x} dx + k \int_0^L (\phi_x + \psi) \bar{\tilde{\psi}} dx = \int_0^L F_3 \bar{\tilde{\psi}} dx, \end{cases} \quad (4.64)$$

para toda terna $(\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \in [H_0^1(0, L)]^2 \times H_*^1(0, L)$.

Em particular, de (4.64)₃, segue que

$$C_3 \int_0^L \psi \bar{\sigma} dx - b \int_0^L \psi_x \bar{\sigma}_x dx + k \int_0^L (\phi_x + \psi) \bar{\sigma} dx = \int_0^L F_3 \bar{\sigma} dx; \quad \forall \sigma \in C_0^1(0, L) \cap H_*^1(0, L),$$

Como $\sigma_x(0) = \sigma_x(L) = 0$, temos:

$$C_3 \int_0^L \psi \bar{\sigma} dx - b \int_0^L \psi_{xx} \bar{\sigma} dx + k \int_0^L (\phi_x + \psi) \bar{\sigma} dx = \int_0^L F_3 \bar{\sigma} dx; \quad \forall \sigma \in C_0^1(0, L) \cap H_*^1(0, L),$$

Portanto:

$$C_3 \psi - b \psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) = F_3. \quad (4.65)$$

Multiplicando a equação (4.65) por uma função $\tilde{\psi} \in H_*^1(0, L)$ e integrando por partes, obtemos:

$$C_3 \int_0^L \psi \bar{\tilde{\psi}} dx - b \psi_x \bar{\tilde{\psi}_x} \Big|_{x=0}^{x=L} + b \int_0^L \psi_x \bar{\tilde{\psi}_x} dx + k \int_0^L (\phi_x + \psi) \bar{\tilde{\psi}} dx = \int_0^L F_3 \bar{\tilde{\psi}} dx \quad (4.66)$$

Finalmente, combinando (4.64)₃ e (4.66), temos:

$$-b \psi_x \bar{\tilde{\psi}_x} \Big|_{x=0}^{x=L} + b \int_0^L \psi_x \bar{\tilde{\psi}_x} dx = b \int_0^L \psi_x \bar{\tilde{\psi}_x} dx; \forall \tilde{\psi} \in H_*^1(0, L).$$

Logo

$$b \psi_x(0) \bar{\tilde{\psi}_x}(0) - b \psi_x(L) \bar{\tilde{\psi}_x}(L); \forall \tilde{\psi} \in H_*^1(0, L). \quad (4.67)$$

Agora, considere as funções $M : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$ e $N : [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por:

$$M(x) = 2L \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) - \frac{4L}{\pi} \quad \text{e} \quad N(x) = -2L \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) + \frac{4L}{\pi}.$$

Note que $M, N \in H_*^1(0, L)$, $M_x(0) = N_x(L) = \pi$ e $M_x(L) = N_x(0) = 0$. Assim, aplicando $\tilde{\psi} = M$ e $\tilde{\psi} = N$ em (4.67) respectivamente, obtém-se: $\psi_x(0) = 0$ e $\psi_x(L) = 0$, logo $\psi \in H_N^2(0, L)$.

Portanto $U = (u, v, \varphi_1, \phi, w, \varphi_2, \psi, z, \varphi_3) \in D(\mathcal{A})$, e como nesse caso $-b \psi_x \bar{\tilde{\psi}_x} \Big|_{x=0}^{x=L} = 0$, temos que o sistema (4.64) é equivalente ao sistema (4.61). Assim, o vetor $U = (u, v, \varphi_1, \phi, w, \varphi_2, \psi, z, \varphi_3)$ é solução do sistema (4.42)–(4.50). Isto é, $(I - \mathcal{A})U = W$. Portanto \mathcal{A} é maximal. Logo, do Teorema de Lummer-Phillips (Teorema 2.31) segue que o operador \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$ sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H} . Assim, do Teorema 2.8, segue que $U : [0, +\infty] \rightarrow \mathcal{H}$ definido por $U(t) = e^{t\mathcal{A}} U_0$ é a única solução do problema (4.35) satisfazendo (4.39) e (4.40). \square

O Teorema anterior pode ser reformulado exclusivamente em termos do Problema original (4.1)–(4.3) como segue:

Teorema 4.9 (Teorema de Existência e Unicidade)

Se $u_0, \phi_0 \in H_0^1(0, L)$, $\psi_0 \in H_*^1(0, L)$ e $u_1, \phi_1, \psi_1 \in L^2(0, L)$, então o problema de valor inicial e de contorno (4.1)–(4.3) admite uma única solução branda (u, ϕ, ψ) satisfazendo:

$$\begin{cases} u, \phi \in C^0([0, +\infty); H_0^1(0, L)) \cap C^1([0, +\infty); L^2(0, L)), \\ \psi \in C^0([0, +\infty); H_*^1(0, L)) \cap C^1([0, +\infty); L^2(0, L)) \end{cases}$$

Se $u_0, \phi_0 \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$, $\psi_0 \in H_N^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)$, $u_1 = \phi_1 = \psi_1 = 0$, então o problema de valor inicial e de contorno (4.1)–(4.3) admite uma única solução regular (u, ϕ, ψ) com a seguinte regularidade:

$$\begin{cases} u, \phi \in C^0([0, +\infty); H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \cap C^1([0, +\infty); H_0^1(0, L)) \cap C^2([0, +\infty); L^2(0, L)), \\ \psi \in C^0([0, +\infty); H_N^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)) \cap C^1([0, +\infty); H_*^1(0, L)) \cap C^2([0, +\infty); L^2(0, L)) \end{cases}$$

Demonstração. Note que, se $u_0, \phi_0 \in H_0^1(0, L)$, $\psi_0 \in H_*^1(0, L)$ e $u_1, \phi_1, \psi_1 \in L^2(0, L)$, temos $U_0 = (u_0, u_1, 0, \phi_0, \phi_1, 0, \psi_0, \psi_1, 0) \in \mathcal{H}$, e quando $u_0, \phi_0 \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$, $\psi_0 \in H_N^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)$ e $u_1 = \phi_1 = \psi_1 = 0$, obtemos $U = (u_0, u_1, 0, \phi_0, \phi_1, 0, \psi_0, \psi_1, 0) \in D(\mathcal{A})$. Portanto, basta aplicar o Teorema 4.8. \square

Para obter uma solução que evolua continuamente no espaço de fase \mathcal{H} (que inclui as energias cinéticas, potenciais e das variáveis de memória, basta que o dado inicial U_0 pertença a \mathcal{H} . Isso significa que as velocidades iniciais $u_t(0) = u_1$, $\phi_t(0) = \phi_1$ e $\psi_t(0) = \psi_1$ podem ser quaisquer funções em $L^2(0, L)$ (energia cinética finita) e as variáveis de memória devem começar "descarregadas" ($\varphi_j(0, y) = 0$). Neste caso, a evolução temporal $U(t) = e^{t\mathcal{A}}U_0$ é bem-definida e contínua, mas não necessariamente diferenciável. A solução satisfaz as equações de forma integral, acomodando assim um estado inicial com movimento.

Contudo, para obter uma solução que seja continuamente diferenciável no tempo e que satisfaça as equações no sentido pontual, é necessário que o dado inicial U_0 pertença ao domínio do operador \mathcal{A} , $D(\mathcal{A})$. Este domínio além de exigir mais regularidade para os dados iniciais, impõe que as velocidades iniciais $u_t(0) = u = 0$, $\phi_t(0) = \phi_1 = 0$ e $\psi_t(0) = \psi_1 = 0$ sejam nulas. Observe que a condição de velocidade inicial nula, necessária para a existência de solução regular, é plenamente plausível do ponto de vista físico no contexto do modelo de ponte suspensa apresentado. Considere, por exemplo, que o cabo principal e o tabuleiro da ponte são inicialmente deformados devido a uma carga estática ou a uma ação constante do vento, e mantidos nessa configuração deformada, caracterizada pelos deslocamentos iniciais u_0 , ϕ_0 e ψ_0 . No instante $t = 0$, o sistema é liberado. A exigência de que as velocidades iniciais sejam nulas, isto é, $u_1 = 0$, $\phi_1 = 0$ e $\psi_1 = 0$, significa que, no exato momento da liberação, a estrutura encontra-se em repouso. Toda a energia do sistema está, portanto, armazenada sob a forma de energia potencial elástica, contida nas deformações iniciais u_0 , ϕ_0 e ψ_0 , não havendo ainda conversão em energia cinética que implique movimento.

As condições iniciais $\varphi_j(0, y) = 0$ impostas às variáveis auxiliares que representam os termos de memória, indicam que, no instante inicial, os mecanismos internos de dissipação associados a cada componente do sistema (o cabo, o deslocamento transversal e a rotação das fibras), não se encontram tensionados. Caso as velocidades iniciais u_1 , ϕ_1 ou ψ_1 fossem não nulas, surgiria uma inconsistência instantânea. Para ilustrar, tome a equação de evolução para o termo de memória com respeito as vibrações do cabo principal:

$$(\varphi_1)_t(t, y) + (y^2 + \eta)\varphi(t, y) - p(y)u_t = 0.$$

No instante $t = 0$, como $\varphi_1(0, y) = 0$, deduz-se que $(\varphi_1)_t(0, y) = p(y)u_1$. Contudo, a função $p(y) = |y|^{(2\alpha-1)/2}$ não é de quadrado integrável em \mathbb{R} , o que implica que $(\varphi_1)_t(0, y) \notin L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$, violando assim a regularidade requerida para uma solução regular.

Esta condição é fundamental porque os amortecimentos fracionários incorporados ao sistema são não locais no tempo, e as forças dissipativas deles decorrentes dependem de toda a história

pregressa das velocidades u_t , ϕ_t e ψ_t . O sistema dispõe de "graus de liberdade internos", representados por φ_1 , φ_2 e φ_3 , os quais armazenam informação sobre o passado. Um estado inicial que inclua velocidades não nulas demandaria que estes graus de liberdade internos fossem excitados de maneira instantânea, com um aporte infinito de energia, decorrente do espectro singular das funções $p(y)$, $q(y)$ e $r(y)$, o que é fisicamente irrealizável. A imposição $u_1 = \phi_1 = \psi_1 = 0$ assegura que o sistema parta de um estado de equilíbrio, sem que haja um salto inicial incompatível com a natureza dos materiais modelados.

Este comportamento reflete a física inerente ao modelo. Os amortecimentos fracionários destinam-se a capturar o comportamento de materiais dotados de memória de longo prazo, como os cabos de aço e o tabuleiro de concreto com propriedades viscoelásticas, os quais não reagem instantaneamente a perturbações bruscas. Em contrapartida, um amortecimento viscoso convencional é puramente instantâneo. Por conseguinte, a condição de velocidade inicial nula é inerente à modelagem que incorpora memória fracionária, ao passo que se torna dispensável na modelagem com amortecimento viscoso. No contexto de pontes suspensas, tal condição corresponde a um cenário no qual a estrutura é liberada a partir de uma configuração estaticamente deformada, sem qualquer impulso inicial, situação comum em testes de vibração ou sob a ação de cargas que variam gradualmente.

4.3 Comportamento Assintótico

Nesta seção, analisaremos o comportamento assintótico da solução obtida anteriormente. Para isso, utilizaremos os resultados de estabilização de semigrupos apresentados no final da terceira seção do Capítulo 2.

Iniciaremos com o estudo das propriedades espectrais do operador \mathcal{A} , responsável por gerar o semigrupo associado ao problema. A partir dessas propriedades, aplicaremos o Teorema de Arendt-Batty (Teorema 2.38) e concluiremos que o semigrupo é fortemente estável, isto é, a solução decai pontualmente para zero quando $t \rightarrow \infty$.

Na sequência, recorreremos ao Teorema de Gearhart (Teorema 2.41) para demonstrar que o semigrupo em questão não apresenta estabilidade exponencial. Finalmente, aplicando o Teorema de Borichev-Tomilov (Teorema 2.39), estabeleceremos que o decaimento ocorre de forma polinomial, caracterizando assim a estabilidade polinomial do semigrupo associado ao nosso problema.

4.3.1 Análise Espectral

Proposição 4.10

Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e \mathcal{A} o operador definido em (4.34). Então o operador $\lambda iI - \mathcal{A}$ é injetivo.

Demonstração. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $U = (u, v, \varphi_1, \phi, w, \varphi_2, \psi, z, \varphi_3) \in D(\mathcal{A})$ tais que $\mathcal{A}U = \lambda iU$. Equiva-

lentemente:

$$v = \lambda i u, \quad (4.68)$$

$$au_{xx} + \tau(\phi - u) - \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy = \lambda i v, \quad (4.69)$$

$$(y^2 + \eta + \lambda i) \varphi_1(y) = p(y) v, \quad (4.70)$$

$$w = \lambda i \phi, \quad (4.71)$$

$$k(\phi_x + \psi)_x - \tau(\phi - u) - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) dy = \rho_1 \lambda i w, \quad (4.72)$$

$$(y^2 + \zeta + \lambda i) \varphi_2(y) = q(y) w, \quad (4.73)$$

$$z = \lambda i \psi, \quad (4.74)$$

$$b\psi_{xx} - k(\phi_x + \psi) - \gamma_3 \int_{\mathbb{R}} r(y) \varphi_3(y) dy = \rho_2 \lambda i z, \quad (4.75)$$

$$(y^2 + \xi + \lambda i) \varphi_3(y) = r(y) z. \quad (4.76)$$

De (4.41), segue-se que

$$\begin{aligned} 0 = Re \langle \lambda i U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= -\gamma_1 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi_1(y)\|_{L^2(0,L)}^2 dy - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) \|\varphi_2(y)\|_{L^2(0,L)}^2 dy \\ &\quad - \gamma_3 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \xi) \|\varphi_3(y)\|_{L^2(0,L)}^2 dy \leq 0 \end{aligned}$$

Portanto

$$\varphi_1(x, y) = 0 = \varphi_2(x, y) = \varphi_3(x, y) = 0, \text{ em quase todo ponto } (x, y) \in (0, L) \times \mathbb{R}. \quad (4.77)$$

Substituindo (4.77) nas equações (4.70), (4.73) e (4.76) respectivamente, obtemos:

$$v(x) = w(x) = z(x) = 0, \text{ em quase todo ponto } x \in (0, L). \quad (4.78)$$

Agora, substituindo (4.78) nas equações (4.68), (4.71) e (4.74), obtemos:

$$\lambda i u(x) = \lambda i \phi(x) = \lambda i \psi(x) = 0, \text{ em quase toda parte } x \in (0, L). \quad (4.79)$$

Se $\lambda \neq 0$, então de (4.79), segue que $u(x) = \phi(x) = \psi(x) = 0$, em quase todo ponto $x \in (0, L)$.

Portanto $U = 0$ em \mathcal{H} , logo $\lambda i I - \mathcal{A}$ é injetivo. Caso contrário ($\lambda = 0$), substitua $\lambda = 0$ e $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$ nas equações (4.69), (4.72) e (4.75). Assim, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -au_{xx} - \tau(\phi - u) = 0, \\ -k(\phi_x + \psi)_x + \tau(\phi - u) = 0, \\ -b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) = 0. \end{cases} \quad (4.80)$$

Multiplicando as equações (4.80)₁, (4.80)₂ e (4.80)₃ por \bar{u} , $\bar{\phi}$, $\bar{\psi}$ respectivamente, integrando por partes e usando o fato de que $u, \phi \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$ e $\psi \in H_N^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)$, obtemos:

$$\begin{cases} a\|u_x\|^2 - \tau \langle \phi - u, u \rangle = 0 \\ +k \langle \phi_x + \psi, \phi_x \rangle + \tau \langle \phi - u, \phi \rangle = 0, \\ b\|\psi_x\|^2 + k \langle \phi_x + \psi, \psi \rangle = 0. \end{cases} \quad (4.81)$$

Somando (4.81)₁, (4.81)₂ e (4.81)₃, obtemos:

$$a\|u\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + \tau\|\phi - u\|^2 + k\|\phi_x + \psi\|^2 = 0. \quad (4.82)$$

De (4.82), segue que $u = \phi = \psi = 0$. Assim, em qualquer caso temos $U = 0$. Portanto $\ker(\lambda iI - \mathcal{A}) = \{0\}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. \square

Corolário 4.11

O escalar λi não é um autovalor do operador \mathcal{A} , qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposição 4.12

Seja \mathcal{A} o operador definido em (4.34). Se $\eta = 0$ ou $\zeta = 0$ ou $\xi = 0$, então \mathcal{A} não é invertível, e consequentemente 0 pertence ao espectro do operador \mathcal{A} , isto é, $0 \in \sigma(\mathcal{A})$.

Demonstração. Suponha que $\eta = 0$ e escolha o vetor $W_0 = (\operatorname{sen}(\pi x/L), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \in \mathcal{H}$. Suponha que existe um vetor $U = (u, v, \phi, w, \psi, z, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in D(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A}U = W_0$. Nesse caso, $\varphi_1(y) = |y|^{\frac{2\alpha-5}{2}} \operatorname{sen}(\pi x/L)$. Como $0 < \alpha < 1$, temos que $\varphi_1 \notin L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))$, o que é um absurdo. Com efeito:

$$\begin{aligned} \|\varphi_1\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |y|^{2\alpha-5} \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |y|^{2\alpha-5} dy = \int_{-\infty}^{-1} |y|^{2\alpha-5} dy + \int_{-1}^1 |y|^{2\alpha-5} dy + \int_1^{+\infty} |y|^{2\alpha-5} dy. \end{aligned}$$

Mas, $\int_{-1}^1 |y|^{2\alpha-5} dy < \infty$, se e somente se $\alpha > 2$.

Os casos em que $\zeta = 0$ ou $\xi = 0$ são semelhantes. Basta escolher um vetor $U \in D(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A}U = (0, 0, 0, \operatorname{sen}(\pi x/L), 0, 0, 0, 0, 0)$ ou $\mathcal{A}U = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \cos(\pi x/L), 0, 0)$. \square

Proposição 4.13

Seja \mathcal{A} o operador definido em (4.34). Então:

- (a) Se $\eta = 0$ ou $\zeta = 0$ ou $\xi = 0$, então o operador $\lambda iI - \mathcal{A}$ é sobrejetivo, qualquer que seja o número real $\lambda \neq 0$.
- (b) Se $\eta, \zeta, \xi > 0$, então $\lambda iI - \mathcal{A}$ é sobrejetiva, qualquer que seja $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $W = (f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, h_2, f_3, g_3, h_3) \in \mathcal{H}$. Nossa objetivo é mostrar que existe um vetor $U = (u, v, \varphi_1, \phi, w, \varphi_2, \psi, z, \varphi_3) \in D(\mathcal{A})$ tal que $(\lambda iI - \mathcal{A})U = W$. Ou seja, valem as seguintes equações:

$$\lambda i u - v = f_1, \quad (4.83)$$

$$\lambda i v - a u_{xx} - \tau(\phi - u) + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy = g_1, \quad (4.84)$$

$$(y^2 + \eta + \lambda i) \varphi_1(y) - p(y) v = h_1(y), \quad (4.85)$$

$$\lambda i \phi - w = f_2, \quad (4.86)$$

$$\rho_1 \lambda i w - k(\phi_x + \psi)_x + \tau(\phi - u) + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) dy = \rho_1 g_2, \quad (4.87)$$

$$(y^2 + \zeta + \lambda i) \varphi_2(y) - q(y) w = h_2(y), \quad (4.88)$$

$$\lambda i \psi - z = f_3, \quad (4.89)$$

$$\rho_2 \lambda i z - b \psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \gamma_3 \int_{\mathbb{R}} r(y) \varphi_3(y) dy = \rho_2 g_3, \quad (4.90)$$

$$(y^2 + \xi + \lambda i) \varphi_3(y) - r(y) z = h_3(y). \quad (4.91)$$

Das equações (4.83), (4.86) e (4.89), segue que:

$$v = \lambda i u - f_1, \quad w = \lambda i \phi - f_2 \quad \text{e} \quad z = \lambda i \psi - f_3. \quad (4.92)$$

Substituindo (4.92), nas equações (4.85), (4.88) e (4.91), respectivamente, obtemos:

$$\varphi_1(y) = \frac{h_1(y)}{y^2 + \eta + \lambda i} - \frac{p(y) f_1}{y^2 + \eta + \lambda i} + \frac{\lambda i p(y) u}{y^2 + \eta + \lambda i}, \quad (4.93)$$

$$\varphi_2(y) = \frac{h_2(y)}{y^2 + \zeta + \lambda i} - \frac{q(y) f_2}{y^2 + \zeta + \lambda i} + \frac{\lambda i q(y) \phi}{y^2 + \zeta + \lambda i}, \quad (4.94)$$

$$\varphi_3(y) = \frac{h_3(y)}{y^2 + \xi + \lambda i} - \frac{r(y) f_3}{y^2 + \xi + \lambda i} + \frac{\lambda i r(y) \psi}{y^2 + \xi + \lambda i}. \quad (4.95)$$

Aplicando o Lemma 4.6 nas expressões (4.93), (4.94) e (4.95), temos:

$$\gamma_1 \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy = \gamma_1 [H_1(x, \alpha, \eta, \lambda i) + C(\alpha, \eta, \lambda i)(\lambda i u - f_1)], \quad (4.96)$$

$$\gamma_2 \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) dy = \gamma_2 [H_2(x, \beta, \zeta, \lambda i) + C(\beta, \zeta, \lambda i)(\lambda i \phi - f_2)], \quad (4.97)$$

$$\gamma_3 \int_{\mathbb{R}} r(y) \varphi_3(y) dy = \gamma_3 [H_3(x, \theta, \xi, \lambda i) + C(\theta, \xi, \lambda i)(\lambda i \psi - f_3)], \quad (4.98)$$

Assim, aplicando as expressões (4.92), (4.96), (4.97) e (4.98) nas equações (4.84), (4.87) e (4.90), respectivamente, obtemos:

$$\begin{aligned} -\lambda^2 u - a u_{xx} - \tau(\phi - u) + \gamma_1 \lambda i C(\alpha, \eta, \lambda i) u &= \lambda i f_1 + g_1 \\ &+ \gamma_1 C(\alpha, \eta, \lambda i) f_1 - \gamma_1 H_1(x, \alpha, \eta, \lambda i), \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} -\rho_1 \lambda^2 \phi - k(\phi_x + \psi)_x + \tau(\phi - u) + \gamma_2 \lambda i C(\beta, \zeta, \lambda i) \phi &= \rho_1 (\lambda i f_2 + g_2) \\ &+ \gamma_2 C(\beta, \zeta, \lambda i) f_2 - \gamma_2 H_2(x, \beta, \zeta, \lambda i), \end{aligned} \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} -\rho_2 \lambda^2 \psi - b \psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) + \gamma_3 \lambda i C(\theta, \xi, \lambda i) \psi &= \rho_2 (\lambda i f_3 + g_3) \\ &+ \gamma_3 C(\theta, \xi, \lambda i) f_3 - \gamma_3 H_3(x, \theta, \xi, \lambda i). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Se $\lambda = 0$, por hipótese, temos $\eta, \zeta, \xi > 0$. Nesse caso, temos:

$$-au_{xx} - \tau(\phi - u) = g_1 + \gamma_1 C(\alpha, \eta, 0) f_1 - \gamma_1 H_1(x, \alpha, \eta, 0), \quad (4.102)$$

$$-k(\phi_x + \psi)_x + \tau(\phi - u) = \rho_1 g_2 + \gamma_2 C(\beta, \zeta, 0) f_2 - \gamma_2 H_2(x, \beta, \zeta, 0), \quad (4.103)$$

$$-b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi) = \rho_2 g_3 + \gamma_3 C(\theta, \xi, 0) f_3 - \gamma_3 H_3(x, \theta, \xi, 0). \quad (4.104)$$

Multiplying as equações (4.102), (4.103) e (4.104) by $\tilde{u} \in H_0^1(0, L)$, $\tilde{\phi} \in H_0^1(0, L)$ e $\tilde{\psi} \in H_*^1(0, L)$ respectivamente, integrando sobre x de 0 a L e, em seguida, aplicando a integração por partes, obtém-se o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} a \int_0^L u_x \tilde{u}_x dx - \tau \int_0^L (\phi - u) \tilde{u} dx = \int_0^L F_1 \tilde{u} dx, \\ k \int_0^L (\phi_x + \psi) \tilde{\phi}_x dx + \tau \int_0^L (\phi - u) \tilde{\phi} dx = \int_0^L F_2 \tilde{\phi} dx, \\ -b\psi_x \tilde{\psi}_x \Big|_{x=0}^{x=L} + b \int_0^L \psi_x \tilde{\psi}_x dx + k \int_0^L (\phi_x + \psi) \tilde{\psi} dx = \int_0^L F_3 \tilde{\psi} dx, \end{cases} \quad (4.105)$$

onde

$$\begin{aligned} F_1 &= \gamma_1 C(\alpha, \eta, 0) f_1 + g_1 - \gamma_1 H_1(x, \alpha, \eta, 0), & F_2 &= \gamma_2 C(\beta, \zeta, 0) f_2 + \rho_1 g_2 - \gamma_2 H_2(x, \beta, \zeta, 0) \text{ e} \\ F_3 &= \gamma_3 C(\theta, \xi, 0) f_3 + \rho_2 g_3 - \gamma_3 H_3(x, \theta, \xi, 0). \end{aligned}$$

Considere o problema variacional auxiliar de encontrar um vetor $(u, \phi, \psi) \in [H_0^1(0, L)]^2 \times H_*^1(0, L)$ tal que:

$$\mathcal{B}((u, \phi, \psi), (\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})) = \mathcal{L}(\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}); \quad \forall (u, \phi, \psi) \in [H_0^1(0, L)]^2 \times H_*^1(0, L), \quad (4.106)$$

$\mathcal{B} : [(H_0^1(0, L))^2 \times H_*^1(0, L)] \times [(H_0^1(0, L))^2 \times H_*^1(0, L)] \rightarrow \mathbb{C}$ é a forma sesquilinear definida por:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}((u, \phi, \psi), (\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})) &= a \int_0^L u_x \tilde{u}_x dx + b \int_0^L \psi_x \tilde{\psi}_x dx + \tau \int_0^L (\phi - u) (\tilde{\phi} - \tilde{u}) dx \\ &\quad + k \int_0^L (\phi_x + \psi) (\tilde{\phi}_x + \tilde{\psi}) dx \end{aligned} \quad (4.107)$$

e $\mathcal{L} : [H_0^1(0, L)]^2 \times H_*^1(0, L) \rightarrow \mathbb{C}$ é a forma antilinear definida por:

$$\mathcal{L}(\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = \int_0^L F_1 \tilde{u} dx + \int_0^L F_2 \tilde{\phi} dx + \int_0^L F_3 \tilde{\psi} dx. \quad (4.108)$$

Agora, basta utilizar o Teorema de Lax-Milgram e proceder de maneira semelhante à abordagem usada na prova do Teorema 4.8. Assim, encontramos um vetor $U = (u, v, \varphi_1, \phi, w, \varphi_2, \psi, z, \varphi_3) \in D(\mathcal{A})$ tal que $(\lambda I - \mathcal{A}) U = W$.

Por fim, suponha que $\lambda \neq 0$. Defina o operador auxiliar $\mathcal{M} : D(\mathcal{M}) \subset H \rightarrow H$ dado por:

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} u \\ \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_{xx} + \tau(\phi - u) - I_1(\alpha, \eta, \lambda)u \\ k(\phi_x + \psi)_x - \tau(\phi - u) - I_2(\beta, \zeta, \lambda)\phi \\ b\psi_{xx} - k(\phi_x + \psi) - I_3(\theta, \xi, \lambda)\psi \end{pmatrix},$$

onde $H := [L^2(0, L)]^2 \times L_*^2(0, L)$, $D(\mathcal{M}) = [H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)]^2 \times [H_N^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)]$ e $I_j(\omega, \delta, \lambda) = \gamma_j \lambda i C(\omega, \delta, \lambda i)$ ($j = 1, 2, 3$).

De maneira similar, do Teorema de Lax-Milgram, conclui-se que é um isomorfismo. Assim, temos que o sistema (4.99)–(4.101) é equivalente a:

$$\left(-\lambda^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} - I \right) \begin{pmatrix} u \\ \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{F}_1 \\ \widetilde{F}_2 \\ \widetilde{F}_3 \end{pmatrix}, \quad (4.109)$$

$\widetilde{F} = [\lambda i + \gamma_1 C(\alpha, \eta, \lambda i)] f_1 + g_1 - \gamma_1 H_1(\alpha, \eta, \lambda i)$, $\widetilde{F}_2 = [\rho_1 \lambda i + \gamma_2 C(\beta, \zeta, \lambda i)] f_1 + \rho_1 g_2 - \gamma_2 H_2(\beta, \zeta, \lambda i)$ e $\widetilde{F}_3 = [\rho_2 \lambda i + \gamma_3 C(\theta, \xi, \lambda i)] f_3 + \rho_2 g_3 - \gamma_3 H_3(\theta, \xi, \lambda i)$.

Como o operador \mathcal{M} é um isomorfismo e $H_0^1(0, L)$, $H_*^1(0, L) \xrightarrow{\text{comp}} L^2(0, L)$, do Teorema de Rellich-Kondrachov (Teorema 1.28), segue que $D(\mathcal{M}) \xrightarrow{\text{comp}} H$. Então o operador \mathcal{M} tem resolvente compacto. Logo \mathcal{M}^{-1} é um operador compacto de H em $D(\mathcal{M})$. Consequentemente, da alternativa de Fredholm (Teorema A.10), segue que, mostrar a existência de um vetor $(u, \phi, \psi) \in D(\mathcal{M})$ solução de (4.109) se reduz a provar que:

$$\ker \left(\lambda^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} - I \right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Com efeito, se $(\widetilde{u}, \widetilde{\phi}, \widetilde{\psi}) \in \ker \left(-\lambda^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} - I \right)$, então;

$$\left(-\lambda^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} I - \mathcal{M} \right) \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{\phi} \\ \widetilde{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Isto é,

$$\begin{cases} (I_1(\alpha, \eta, \lambda) - \lambda^2) \widetilde{u} - a \widetilde{u}_{xx} - \tau(\widetilde{\phi} - \widetilde{u}) = 0 \\ (I_2(\beta, \zeta, \lambda) - \rho_1 \lambda^2) \widetilde{\phi} - k(\widetilde{\phi}_x + \widetilde{\psi})_x + \tau(\widetilde{\phi} - \widetilde{u}) = 0 \\ (I_3(\theta, \xi, \lambda) - \rho_2 \lambda^2) \widetilde{\psi} - b \widetilde{\psi}_{xx} + k(\widetilde{\phi}_x + \widetilde{\psi}) = 0 \end{cases} \quad (4.110)$$

Multiplicando (4.110), por \bar{u} , $\bar{\phi}$ e $\bar{\psi}$ respectivamente, integrando por partes, segue-se que $(\widetilde{u}, \widetilde{\phi}, \widetilde{\psi}) = (0, 0, 0)$. Portanto, pela alternativa de Fredholm (Teorema A.10), existe solução $(u, \phi, \psi) \in [H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)]^2 \times [H_N^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)]$ para (4.109). Agora, definindo v, w, z como dado em (4.92) e $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ como dado em (4.93)–(4.95). Evidentemente, $U = (u, v, \varphi_1, \psi, w, \varphi_2, \psi, z, \varphi_3) \in D(\mathcal{A})$ e $(\lambda i I - \mathcal{A})U = W$. \square

4.3.2 Estabilidade Forte e Falta de Estabilidade Uniforme

Teorema 4.14

Seja \mathcal{A} o operador definido em (4.34). O C_0 -semigrupo de contrações $\{e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$ sobre \mathcal{H} é fortemente estável (veja Definição 2.35). Isto é

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|U(t)\|_{\mathcal{H}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{t\mathcal{A}} U_0\|_{\mathcal{H}} = 0; \forall U_0 \in \mathcal{H},$$

onde $U : [0, t] \rightarrow \mathcal{H}$ é a solução do problema (4.35).

Demonstração. Do Corolário 4.11, segue-se que o operador \mathcal{A} não possui autovalores puramente imaginários. Observe que como o operador \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações, do Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.29), segue que \mathcal{A} é um operador fechado, no caso em que $\eta = 0$ ou $\zeta = 0$ ou $\xi = 0$, a Proposição 4.12 e o item (a) da Proposição 4.13, implicam que $\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda i; \lambda \in \mathbb{R}\} = \{0\}$. Por outro lado, no caso em que $\eta, \zeta, \xi > 0$, a Proposição 4.10 e o item (b) da Proposição 4.13, garante que $\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda i; \lambda \in \mathbb{R}\} = \emptyset$. Portanto, em ambos os casos, podemos aplicar o Teorema de Arendt e Batty (Teorema 2.38) e, assim, obter o resultado desejado. \square

Teorema 4.15

O C_0 -semigrupo de contrações $\{e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$ não é exponencialmente estável (Veja Definição 2.35). Isto é, não existem constantes $w > 0$ e $M \geq 1$ tais que:

$$\|e^{\mathcal{A}t}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M e^{-wt}; \forall t \geq 0.$$

Em termos da solução do problema (4.35), não existem constantes $w > 0$ e $C \geq 1$, tais que:

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C \|U_0\|_{\mathcal{H}} \cdot e^{-wt}; \forall t > 0$$

Demonstração. Inicialmente, observe que, conforme mostrado na Proposição 4.12, para $\eta = 0$ ou $\zeta = 0$ ou $\xi = 0$, temos que $0 \in \sigma(\mathcal{A})$, e, portanto $\{i\lambda; \lambda \in \mathbb{R}\} \not\subset \rho(\mathcal{A})$, onde $\rho(\mathcal{A})$ é o conjunto resolvente do operador \mathcal{A} . Assim, de acordo com o Teorema de Gearhart (Teorema 2.41), segue-se que o semigrupo $(e^{t\mathcal{A}})_{t \geq 0}$ não é exponencialmente estável e, consequentemente, a solução $U(t)$ do problema (4.35) não decai exponencialmente.

Por outro lado, se $\eta, \zeta, \xi > 0$ a Proposição 4.10 e o item (b) da Proposição 4.13 garantem que $\{\lambda i; \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A})$, pois do Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.29), segue que o operador \mathcal{A} é fechado. Para esse caso, mostraremos que um número infinito de autovalores de \mathcal{A} se aproxima do eixo imaginário e, isto é:

$$\limsup_{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} = +\infty.$$

Dessa forma, novamente pelo Teorema de Gearhart (Teorema 2.41), conclui-se que o problema (4.35) não é exponencialmente estável.

Considere o operador auxiliar $A : D(A) \subset H \rightarrow H$, definido por:

$$A \begin{pmatrix} u \\ \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -au_{xx} - \tau(\phi - u) \\ \frac{1}{\rho_1} [-k(\phi_x + \psi)_x + \tau(\phi - u)] \\ \frac{1}{\rho_2} [-b\psi_{xx} + k(\phi_x + \psi)] \end{pmatrix}, \quad (4.111)$$

onde $H = [L^2(0, L)]^2 \times L_*^2(0, L)$ e $D(A) = [H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)]^2 \times [H_N^2(0, L) \cap H_*^1(0, L)]$.

Inicialmente note que A é um operador positivo, e portanto, seus autovalores são números reais positivos. De fato, se $X = (u, \phi, \psi)$, então:

$$\langle AX, X \rangle_H = a\|u_x\|^2 + \tau\|\phi - u\|^2 + b\|\psi_x\|^2 + k\|\phi_x + \psi\|^2 \geq 0,$$

onde, para $X = (u, \phi, \psi)$ e $\tilde{X} = (\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})$, tem-se:

$$\langle X, \tilde{X} \rangle_H = \langle u, \tilde{u} \rangle + \rho_1 \langle \phi, \tilde{\phi} \rangle + \rho_2 \langle \psi, \tilde{\psi} \rangle.$$

Além disso, como $H_0^1(0, L)$ e $H_*^1(0, L)$ estão compactamente imersos em $L^2(0, L)$, do Teorema de Rellich-Kondrachov (Teorema 1.28), segue que $D(A) \xrightarrow{\text{comp}} H$. Portanto, o operador A tem resolvente compacto. Assim, pelo Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos com Resolvente Compacto (Teorema A.11), existe um sequência de autovalores reais positivos $(\lambda_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ para A , tendendo ao infinito e correspondente a uma base ortonormal de autovetores $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n, \phi_n, \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em H . Isto é:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^2 = +\infty \quad \text{e} \quad AX_n = \lambda_n^2 X_n; \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.112)$$

Considere o vetor

$$U_n = \left(\frac{1}{i\lambda_n} u_n, u_n, (\varphi_1)_n, \frac{1}{i\lambda_n} \phi_n, \phi_n, (\varphi_2)_n, \frac{1}{i\lambda_n} \psi_n, \psi_n, (\varphi_3)_n \right),$$

onde u_n, ϕ_n, ψ_n são as componentes do vetor X_n e

$$(\varphi_1)_n(y) = \frac{p(y)}{y^2 + \eta + i\lambda_n} u_n, \quad (\varphi_2)_n(y) = \frac{q(y)}{y^2 + \zeta + i\lambda_n} \phi_n \quad \text{e} \quad (\varphi_3)_n(y) = \frac{r(y)}{y^2 + \xi + i\lambda_n} \psi_n. \quad (4.113)$$

Note que $U_n \in D(\mathcal{A})$.

Seja $W_n = ((f_1)_n, (g_1)_n, (h_1)_n, (f_2)_n, (g_2)_n, (h_2)_n) \in \mathcal{H}$ tal que $(i\lambda_n - \mathcal{A}) U_n = W_n$. Em termos

das suas componentes, temos:

$$i\lambda_n \frac{1}{i\lambda_n} u_n - u_n = (f_1)_n, \quad (4.114)$$

$$i\lambda_n u_n - \frac{a}{i\lambda_n} (u_n)_{xx} - \frac{\tau}{i\lambda_n} (\phi_n - u_n) + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} p(y) (\varphi_1)_n(y) dy = (g_1)_n, \quad (4.115)$$

$$(y^2 + \eta + i\lambda_n) (\varphi_1)_n(y) - p(y) u_n = (h_1)_n(y), \quad (4.116)$$

$$i\lambda_n \frac{1}{i\lambda_n} \phi_n - \phi_n = (f_2)_n, \quad (4.117)$$

$$i\rho_1 \lambda_n \phi_n - \frac{k}{i\lambda_n} ((\phi_n)_x + \psi_n)_x + \frac{\tau}{i\lambda_n} (\phi_n - u_n) + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} q(y) (\varphi_2)_n(y) dy = \rho_1 (g_2)_n, \quad (4.118)$$

$$(y^2 + \zeta + i\lambda_n) (\varphi_2)_n(y) - q(y) \phi_n = (h_2)_n(y), \quad (4.119)$$

$$i\lambda_n \frac{1}{i\lambda_n} \psi_n - \psi_n = (f_3)_n, \quad (4.120)$$

$$i\rho_2 \lambda_n \psi_n - \frac{b}{i\lambda_n} (\psi_n)_{xx} + \frac{k}{i\lambda_n} ((\phi_n)_x + \psi_n)_x + \gamma_3 \int_{\mathbb{R}} r(y) (\varphi_3)_n(y) dy = \rho_2 (g_3)_n, \quad (4.121)$$

$$(y^2 + \xi + i\lambda_n) (\varphi_3)_n(y) - r(y) \psi_n = (h_3)_n(y). \quad (4.122)$$

Das Equações (4.114), (4.117) e (4.120), segue que

$$(f_1)_n = (f_2)_n = (f_3)_n = 0; \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.123)$$

Por outro lado, como $\eta, \zeta, \xi > 0$, aplicando as expressões em (4.113) nas equações (4.116), (4.119) e (4.122) respectivamente, obtemos:

$$(h_1)_n(y) = (y^2 + \eta + i\lambda_n) \frac{p(y)}{y^2 + \eta + i\lambda_n} u_n - p(y) u_n = p(y) u_n - p(y) u_n = 0; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.124)$$

e

$$(h_2)_n(y) = q(y) \phi_n - q(y) \phi_n = 0 \quad \text{e} \quad (h_3)_n(y) = r(y) \psi_n - r(y) \psi_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.125)$$

Agora como λ_n^2 é autovalor para o operador Auxiliar A definido em (4.111) (veja expressão (4.112)), temos que:

$$\begin{cases} -a(u_n)_{xx} - \tau(\phi_n - u_n) = \lambda_n^2 u_n, \\ -k((\phi_n)_x + \psi_n)_x + \tau(\phi_n - u_n) = \rho_1 \lambda_n^2 \phi_n, \\ -b(\psi_n)_{xx} + k((\phi_n)_x + \psi_n) = \rho_2 \lambda_n^2 \psi_n. \end{cases}$$

Multiplicando cada equação do sistema anterior, por $1/(i\lambda_n)$, obtemos:

$$\begin{cases} -\frac{a}{i\lambda_n} (u_n)_{xx} - \frac{\tau}{i\lambda_n} (\phi_n - u_n) = -i\lambda_n u_n, \\ -\frac{k}{i\lambda_n} ((\phi_n)_x + \psi_n)_x + \frac{\tau}{i\lambda_n} (\phi_n - u_n) = -i\rho_1 \lambda_n \phi_n, \\ -\frac{b}{i\lambda_n} (\psi_n)_{xx} + \frac{k}{i\lambda_n} ((\phi_n)_x + \psi_n) = -i\rho_2 \lambda_n \psi_n. \end{cases} \quad (4.126)$$

Finalmente, aplicando as respectivas equações do sistema (4.126) e as expressões (4.113) nas equações (4.116), (4.119) e (4.122), obtemos:

$$(g_1)_n = \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \frac{[p(y)]^2}{y^2 + \eta + i\lambda_n} u_n = \gamma_1 C(\alpha, \eta, i\lambda_n) u_n; \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.127)$$

$$(g_2)_n = \frac{\gamma_2}{\rho_1} \int_{\mathbb{R}} \frac{[q(y)]^2}{y^2 + \zeta + i\lambda_n} \phi_n dy = \frac{\gamma_2}{\rho_1} C(\beta, \zeta, i\lambda_n) \phi_n; \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.128)$$

$$(g_3)_n = \frac{\gamma_3}{\rho_2} \int_{\mathbb{R}} \frac{[r(y)]^2}{y^2 + \xi + i\lambda_n} \psi_n dy = \frac{\gamma_3}{\rho_2} C(\theta, \xi, i\lambda_n) \psi_n; \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.129)$$

Do Lema 4.6, segue que $C(\omega, \delta, i\lambda_n) = C_1(\delta + i\lambda_n)^{\omega-1}$; $\forall \lambda_n \neq 0$ e $\delta \geq 0$.

Portanto, das equações (4.127)–(4.129), temos:

$$\|(g_1)_n\| \leq \widetilde{C}_1 \frac{\|u_n\|}{(\eta + |\lambda_n|)^{1-\alpha}}, \quad \|(g_2)_n\| \leq \widetilde{C}_2 \frac{\|\phi_n\|}{(\zeta + |\lambda_n|)^{1-\beta}} \quad \text{e} \quad \|(g_3)_n\| \leq \widetilde{C}_3 \frac{\|\psi_n\|}{(\xi + |\lambda_n|)^{1-\theta}}, \quad (4.130)$$

onde

$$\widetilde{C}_1 = \gamma_1 C_1, \quad \widetilde{C}_2 = \frac{\gamma_2 C_1}{\rho_1} \quad \text{e} \quad \widetilde{C}_3 = \frac{\gamma_3 C_1}{\rho_2}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^2 = +\infty$ (Ver (4.112)) e $0 < \alpha, \beta, \theta < 1$, de (4.130) segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(g_1)_n\| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|(g_2)_n\| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|(g_3)_n\| = 0. \quad (4.131)$$

Por fim, como $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n, \phi_n, \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base ortonormal de vetores em H , temos que $\|X_n\|^2 = \|u_n\|^2 + \rho_1 \|\phi_n\|^2 + \rho_2 \|\psi_n\|^2 = 1$. Assim, das Desigualdade de Poincaré (Teorema 1.17) e da desigualdade (4.38), segue que:

$$\begin{aligned} \|U_n\|_{\mathcal{H}}^2 &\geq a\|(u_n)_x\|^2 + b\|(\psi_n)_x\|^2 + k\|(\phi_n)_x + \psi_n\|^2 \\ &\geq \frac{a}{L^2} \|u_n\|^2 + \frac{b}{4L^2} \|\psi_n\|^2 + k\|(\phi_n)_x + \psi_n\|^2 \\ &\geq \frac{a}{L^2} \|u_n\|^2 + \frac{b}{2L^2} \|\psi_n\|^2 + \tilde{k}L^2 \|\phi_n\|^2 \\ &\geq C_4 (\|u_n\|^2 + \rho_1 \|\phi_n\|^2 + \rho_2 \|\psi_n\|^2) = C_4; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{k} = \min \left\{ \frac{b}{4L^2}, \frac{k}{2} \right\} \quad \text{e} \quad C_4 = \min \left\{ \frac{a}{L^2}, \frac{\tilde{k}L^2}{\rho_1}, \frac{b}{2L^2\rho_2} \right\}.$$

Portanto, dos limites em (4.131), temos:

$$\begin{aligned} \limsup_{\lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} &\geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|(i\lambda_n I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \\ &\geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|(i\lambda_n I - \mathcal{A})^{-1} W_n\|_{\mathcal{H}}}{\|W_n\|_{\mathcal{H}}} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|U_n\|_{\mathcal{H}}}{\|W_n\|_{\mathcal{H}}} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{C_4}}{\|(g_1)_n\| + \rho_1 \|(g_2)_n\| + \rho_2 \|(g_3)_n\|} = +\infty. \end{aligned}$$

□

4.3.3 Estabilidade Polinomial

Teorema 4.16

Seja \mathcal{A} o operador definido em (4.34) e suponha que $\eta, \zeta, \xi > 0$. O C_0 -semigrupo de contrações $\{e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$ é polinomialmente estável (veja Definição 2.37). Mais precisamente, se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então existe uma constante $M > 0$ tal que:

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} = \|e^{t\mathcal{A}}U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{M}{t^{\frac{1}{2-2\min\{\alpha,\beta,\theta\}}}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A})}, \quad \forall U_0 \in D(\mathcal{A}),$$

onde $U : [0, t] \rightarrow \mathcal{H}$ é a solução do problema (4.35).

Demonstração. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $W = \{f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, h_2, f_3, g_3, h_3\} \in \mathcal{H}$. Considere a equação resolvente

$$(\lambda iI - \mathcal{A})U = W \quad (4.132)$$

Do item (b) da Proposição 4.13, existe um vetor $U = (u, v, \varphi_1, \psi, w, \varphi_2, \psi, z, \varphi_3) \in D(\mathcal{A})$ satisfazendo a equação resolvente (4.132), e portanto, satisfazendo o sistema (4.83)–(4.91).

Tomando o produto interno de $(i\lambda I - \mathcal{A})U$ com U em \mathcal{H} , obtemos

$$\lambda i|U|_{\mathcal{H}}^2 - \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = \langle W, U \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (4.133)$$

Tomando a parte real da Equação (4.133) e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos:

$$Re(-\langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}}) = Re(\langle W, U \rangle_{\mathcal{H}}) \leq |\langle W, U \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|U\|_{\mathcal{H}} \|W\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.134)$$

Usando a expressão (4.41), obtemos:

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi_1(y)\|_{L^2(0,L)}^2 dy + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) \|\varphi_2(y)\|_{L^2(0,L)}^2 dy + \gamma_3 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \xi) \|\varphi_3(y)\|_{L^2(0,L)}^2 dy \\ & \leq \|U\|_{\mathcal{H}} \|W\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Por outro lado, das equações (4.85), (4.88) e (4.91), segue que:

$$p(y)|v| \leq (y^2 + \eta + |\lambda|) |\varphi_1(y)| + |h_1(y)| \quad (4.136)$$

$$q(y)|w| \leq (y^2 + \zeta + |\lambda|) |\varphi_2(y)| + |h_2(y)| \quad (4.137)$$

$$r(y)|z| \leq (y^2 + \xi + |\lambda|) |\varphi_3(y)| + |h_3(y)|. \quad (4.138)$$

Multiplicando a equação (4.136) por $(y^2 + \eta + |\lambda|)^{-1} p(y)$, obtemos:

$$(y^2 + \eta + |\lambda|)^{-1} [p(y)]^2 |v| \leq p(y) |\varphi_1(y)| + (y^2 + \eta + |\lambda|)^{-1} p(y) |h_1(y)|. \quad (4.139)$$

Integrando com relação à variável y em \mathbb{R} , e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{2\alpha-1} |v|}{y^2 + \eta + |\lambda|} dy \leq \int_{\mathbb{R}} |y|^{\frac{2\alpha-1}{2}} |\varphi_1(y)| dy + \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{\frac{2\alpha-1}{2}} |h_1(y)|}{y^2 + \eta + |\lambda|} dy \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{2\alpha-1}}{y^2 + \eta} dy \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |(y^2 + \eta) \varphi_1(y)|^2 dy \right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{2\alpha-1}}{(y^2 + \eta + |\lambda|)^2} dy \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |h_1(y)|^2 dy \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Portanto

$$C(\alpha, \eta, |\lambda|) \cdot |\nu| \leq \sqrt{C(\alpha, \eta, 0)} \left(\int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dy \right)^{1/2} + \sqrt{D(\alpha, \eta, |\lambda|)} \left(\int_{\mathbb{R}} |h_1(y)|^2 dy \right)^{1/2}, \quad (4.140)$$

onde

$$C(\alpha, \eta, |\lambda|) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{2\alpha-1} dy}{|y|^2 + \eta + |\lambda|}, \quad C(\alpha, \eta, 0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{2\alpha-1} dy}{|y|^2 + \eta} \quad \text{e} \quad D(\alpha, \eta, |\lambda|) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{2\alpha-1} dy}{(|y|^2 + \eta + |\lambda|)^2}$$

são constantes (veja o Lema 4.5).

Aplicando a desigualdade de Young (Proposição A.3) em (4.140), obtemos:

$$\begin{aligned} [C(\alpha, \eta, |\lambda|)]^2 |\nu|^2 &\leq \left[\sqrt{C(\alpha, \eta, 0)} \left(\int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dy \right)^{1/2} + \sqrt{D(\alpha, \eta, |\lambda|)} \left(\int_{\mathbb{R}} |h_1(y)|^2 dy \right)^{1/2} \right]^2 \\ &\leq 2C(\alpha, \eta, 0) \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dy + 2D(\alpha, \eta, |\lambda|) \int_{\mathbb{R}} |h_1(y)|^2 dy. \end{aligned} \quad (4.141)$$

Do Lema 4.5, obtemos:

$$C(\alpha, \eta, |\lambda|) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{2\alpha-1} dy}{y^2 + \eta + |\lambda|} = C_1(\eta + |\lambda|)^{\alpha-1} \leq C_1 |\lambda|^{\alpha-1}; \quad \forall \lambda \neq 0 \quad (4.142)$$

e

$$D(\alpha, \eta, |\lambda|) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{2\alpha-1} dy}{(y^2 + \eta + |\lambda|)^2} = C_2(\eta + |\lambda|)^{\alpha-2} \leq C_2 |\lambda|^{2\alpha-2}; \quad \forall |\lambda| > 1, \quad (4.143)$$

Usando (4.143) e (4.142) em (4.141), obtemos:

$$(C_1)^2 |\lambda|^{2\alpha-2} |\nu|^2 \leq C_3 \left(\int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dy \right) + 2C_2 |\lambda|^{2\alpha-2} \left(\int_{\mathbb{R}} |h_1(y)|^2 dy \right); \quad \forall |\lambda| > 1,$$

onde $C_3 = 2C(\alpha, \eta, 0)$.

Então

$$|\nu|^2 \leq C |\lambda|^{2-2\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dy \right) + C \left(\int_{\mathbb{R}} |h_1(x, y)|^2 dy \right); \quad \forall |\lambda| > 1, \quad (4.144)$$

onde $C = \max\{C_3/(C_1)^2, 2C_2/(C_1)^2\}$.

Integrando a expressão (4.144) com respeito a variável x , de 0 a L , obtém-se:

$$\int_0^L |\nu|^2 dx \leq C |\lambda|^{2-2\alpha} \int_0^L \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dy dx + C \int_0^L \int_{\mathbb{R}} |h_1(x, y)|^2 dy dx. \quad (4.145)$$

Aplicando a desigualdade (4.135) na expressão (4.145), obtemos:

$$\int_0^L |\nu|^2 dx \leq C |\lambda|^{2-2\alpha} \|U\|_{\mathcal{H}} \|W\|_{\mathcal{H}} + C \|W\|_{\mathcal{H}}^2; \quad \forall |\lambda| > 1 \quad (4.146)$$

De maneira totalmente análoga, podemos começar com as equações (4.137) e (4.138) e obter:

$$\int_0^L |w|^2 dx \leq C |\lambda|^{2-2\beta} \|U\|_{\mathcal{H}} \|W\|_{\mathcal{H}} + C \|W\|_{\mathcal{H}}^2; \quad \forall |\lambda| > 1 \quad (4.147)$$

$$\int_0^L |z|^2 dx \leq C |\lambda|^{2-2\theta} \|U\|_{\mathcal{H}} \|W\|_{\mathcal{H}} + C \|W\|_{\mathcal{H}}^2; \quad \forall |\lambda| > 1 \quad (4.148)$$

Agora, multiplicando a equação (4.84) por \bar{u} e integrando de 0 a L com respeito a variável x , obtemos:

$$\lambda i \int_0^L v \bar{u} dx - a \int_0^L u_{xx} \bar{u} dx - \tau \int_0^L (\phi - u) \bar{u} dx + \gamma_1 \int_0^L \bar{u} \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy dx = \int_0^L g_1 \bar{u} dx.$$

por outro lado, de (4.83), segue que $-\lambda i \bar{u} = \bar{f}_1 + \bar{v}$, e portanto:

$$\begin{aligned} -a \int_0^L u_{xx} \bar{u} dx - \tau \int_0^L \int_0^L (\phi - u) \bar{u} dx &= \int_0^L |v|^2 dx - \gamma_1 \int_0^L \bar{u} \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy dx \\ &+ \int_0^L \bar{f}_1 v dx + \int_0^L g_1 \bar{u} dx. \end{aligned}$$

Por fim, integrando por partes, obtemos:

$$\begin{aligned} a \int_0^L |u_x|^2 dx - \tau \int_0^L (\phi - u) \bar{u} dx &= \int_0^L |v|^2 dx - \gamma_1 \int_0^L \bar{u} \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy dx \\ &+ \int_0^L \bar{f}_1 v dx + \int_0^L g_1 \bar{u} dx. \end{aligned} \quad (4.149)$$

Agora, multiplicando (4.87) por $\bar{\phi}$ e (4.90) por $\bar{\psi}$, e, usando as equações (4.86) e (4.89) respectivamente, de forma análoga, obtemos:

$$\begin{aligned} k \int_0^L (\phi_x + \psi) \bar{\phi}_x dx + \tau \int_0^L (\phi - u) \bar{\phi} dx &= \rho_1 \int_0^L |w|^2 dx - \gamma_2 \int_0^L \bar{\phi} \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) dy dx \\ &+ \rho_1 \int_0^L \bar{f}_2 w dx + \rho_1 \int_0^L g_2 \bar{\phi} dx. \end{aligned} \quad (4.150)$$

e

$$\begin{aligned} b \int_0^L |\psi_x|^2 dx + k \int_0^L (\phi_x + \psi) \bar{\psi} dx &= \rho_2 \int_0^L |z|^2 dx - \gamma_3 \int_0^L \bar{\psi} \int_{\mathbb{R}} r(y) \varphi_3(y) dy dx \\ &+ \rho_2 \int_0^L \bar{f}_3 z dx + \rho_2 \int_0^L g_3 \bar{\psi} dx. \end{aligned} \quad (4.151)$$

Somando as equações (4.149), (4.150) e (4.151), obtemos:

$$\begin{aligned} a \int_0^L |u_x|^2 dx + b \int_0^L |\psi_x|^2 dx + \tau \int_0^L |\phi - u|^2 dx + k \int_0^L |\phi_x + \psi|^2 dx \\ \leq \int_0^L |v|^2 dx + \rho_1 \int_0^L |w|^2 dx + \rho_2 \int_0^L |z|^2 dx + \gamma_1 \left| \int_0^L \bar{u} \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy dx \right| \\ + \gamma_2 \left| \int_0^L \bar{\phi} \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) dy dx \right| + \gamma_3 \left| \int_0^L \bar{\psi} \int_{\mathbb{R}} r(y) \varphi_3(y) dy dx \right| \\ + \left| \int_0^L (\bar{f}_1 v + g_1 \bar{u}) dx \right| + \rho_1 \left| \int_0^L (\bar{f}_2 w + g_2 \bar{\phi}) dx \right| + \rho_2 \left| \int_0^L (\bar{f}_3 z + g_3 \bar{\psi}) dx \right|. \end{aligned} \quad (4.152)$$

Por outro lado, aplicando as desigualdades de Cauchy-Schwarz duas vezes, e, a desigualdade

de Young Generalizada (Corolário A.4), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^L \bar{u} \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy dx \right| &\leq \|u\| \cdot \left(\int_0^L \left| \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy \right|^2 dx \right)^{1/2} \\
 &\leq \|u\| \cdot \left[\int_0^L \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{[p(y)]^2}{y^2 + \eta} dy \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dy \right) dx \right]^{1/2} \\
 &= \|u\| \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{[p(y)]^2}{y^2 + \eta} dy \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^L \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dy dx \right)^{1/2} \\
 &\leq \varepsilon_1 \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{[p(y)]^2 dy}{y^2 + \eta} \right) \|u\|^2 + C(\varepsilon_1) \int_0^L \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dy dx.
 \end{aligned}$$

onde ε_1 é um número positivo a escolher.

Portanto, da desigualdade de Poincaré, obtemos:

$$\left| \int_0^L \bar{u} \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy dx \right| \leq L^2 \varepsilon_1 C(\alpha, \eta, 0) \|u_x\|^2 + C(\varepsilon_1) \int_0^L \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dy dx. \quad (4.153)$$

Analogamente, obtém-se as seguintes estimativas:

$$\left| \int_0^L \bar{\phi} \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) dy dx \right| \leq L^2 \varepsilon_2 C(\beta, \zeta, 0) \|\phi_x\|^2 + C(\varepsilon_2) \int_0^L \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) |\varphi_2(y)|^2 dy dx \quad (4.154)$$

e

$$\left| \int_0^L \bar{\psi} \int_{\mathbb{R}} r(y) \varphi_3(y) dy dx \right| \leq 4L^2 \varepsilon_3 C(\theta, \xi, 0) \|\psi_x\|^2 + C(\varepsilon_3) \int_0^L \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \xi) |\varphi_3(y)|^2 dy dx \quad (4.155)$$

Além disso, note que:

$$\begin{aligned}
 &\gamma_1 L^2 \varepsilon_1 C(\alpha, \eta, 0) \|u_x\|^2 + \gamma_2 L^2 \varepsilon_2 C(\beta, \zeta, 0) \|\phi_x\|^2 + 4\gamma_3 L^2 \varepsilon_3 C(\theta, \xi, 0) \|\psi_x\|^2 \leq \gamma_1 L^2 \varepsilon_1 C(\alpha, \eta, 0) \|u_x\|^2 \\
 &+ 2\gamma_2 L^2 \varepsilon_2 C(\beta, \zeta, 0) \|\phi_x + \psi\|^2 + 8\gamma_2 L^4 C(\beta, \zeta, 0) \|\psi_x\|^2 + 4\gamma_3 L^2 \varepsilon_3 C(\theta, \xi, 0) \|\psi_x\|^2
 \end{aligned} \quad (4.156)$$

Assim, usando as estimativas (4.153), (4.154), (4.155) e (4.156) em (4.152), obtemos:

$$\begin{aligned}
 &a \|u_x\|^2 + b \|\psi_x\|^2 + \tau \|\phi - u\|^2 + k \|\phi_x + \psi\|^2 \leq \|v\|^2 + \rho_1 \|w\|^2 + \rho_2 \|z\|^2 + \frac{a}{2} \|u_x\|^2 \\
 &+ C(\varepsilon_1) \gamma_1 \int_0^L \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dy dx + \frac{k}{2} \|\phi_x + \psi\|^2 + C(\varepsilon_2) \gamma_2 \int_0^L \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) |\varphi_2(y)|^2 dy dx \\
 &+ \frac{b}{2} \|\psi_x\|^2 + C(\varepsilon_3) \gamma_3 \int_0^L \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \xi) |\varphi_3(y)|^2 dy dx + \left| \int_0^L \bar{f}_1 v dx \right| + \left| \int_0^L g_1 \bar{u} dx \right| \\
 &+ \rho_1 \left| \int_0^L \bar{f}_2 w dx \right| + \rho_1 \left| \int_0^L g_2 \bar{\phi} dx \right| + \rho_2 \left| \int_0^L \bar{f}_3 z dx \right| + \rho_2 \left| \int_0^L g_3 \bar{\psi} dx \right|,
 \end{aligned}$$

onde

$$\varepsilon_1 = \frac{a}{2L^2 \gamma_1 C(\alpha, \eta, 0)}, \quad \varepsilon_2 = \min \left\{ \frac{k}{4L^2 \gamma_2 C(\beta, \zeta, 0)}, \frac{b}{32L^4 \gamma_2 C(\beta, \zeta, 0)} \right\} \quad \text{e} \quad \varepsilon_3 = \frac{b}{16L^2 \gamma_3 C(\theta, \xi, 0)}$$

Agrupando os termos semelhantes, utilizando a desigualdade de Poincaré e a desigualdade (4.38), obtemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{2} \|u_x\|^2 dx + \frac{b}{2} \|\psi_x\|^2 + \tau \|\phi - u\|^2 + \frac{k}{2} \|\phi_x + \psi\|^2 \leq \|v\|^2 + \rho_1 \|w\|^2 + \rho_2 \|z\|^2 \\
& + C(\varepsilon_1) \gamma_1 \int_0^L \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dy dx + C(\varepsilon_2) \gamma_2 \int_0^L \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) |\varphi_2(y)|^2 dy dx \\
& + C(\varepsilon_3) \gamma_3 \int_0^L \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \xi) |\varphi_3(y)|^2 dy dx + L \|(f_1)_x\| \|v\| + L \|g_1\| \|u_x\| \\
& + L \rho_1 \|(f_2)_x\| \|w\| + L \rho_1 \|g_2\| \|\phi_x\| + 2L \rho_2 \|(f_3)_x\| \|z\| + 2L \rho_2 \|g_3\| \|\psi_x\|. \tag{4.157}
\end{aligned}$$

Agora, como $y^2 + \delta > \delta > 0$, temos

$$\gamma_j \|\varphi_j\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))} \leq \frac{\gamma_j}{\delta} \int_0^L \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \delta) |\varphi_j(y)|^2 dy dx,$$

inserindo $\|U\|^2$ e aplicando a estimativa (4.157), obtemos:

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 & \leq 2 \left(\frac{a}{2} \|u_x\|^2 dx + \frac{b}{2} \|\psi_x\|^2 + \tau \|\phi - u\|^2 + \frac{k}{2} \|\phi_x + \psi\|^2 \right) + \|v\|^2 + \rho_1 \|w\|^2 + \rho_2 \|z\|^2 \\
& + \gamma_1 \|\varphi_1\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))}^2 + \gamma_2 \|\varphi_2\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))}^2 + \gamma_3 \|\varphi_3\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(0, L))}^2 \\
& \leq 3\|v\|^2 + 3\rho_1 \|w\|^2 + 3\rho_2 \|z\|^2 + \left(2C(\varepsilon_1) + \frac{1}{\eta} \right) \gamma_1 \int_0^L \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dy dx \\
& + \left(2C(\varepsilon_2) + \frac{1}{\zeta} \right) \gamma_2 \int_0^L \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) |\varphi_2(y)|^2 dy dx + \left(2C(\varepsilon_3) + \frac{1}{\xi} \right) \gamma_3 \int_0^L \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \xi) |\varphi_3(y)|^2 dy dx \\
& + L \|(f_1)_x\| \|v\| + L \|g_1\| \|u_x\| + L \rho_1 \|(f_2)_x + f_3\| \|w\| + L \rho_1 \|g_2\| \|\phi_x + \psi\| + 2L^2 \rho_1 \|(f_3)_x\| \|w\| \\
& + 2L^2 \rho_1 \|g_2\| \|\psi_x\| + 2L \rho_2 \|(f_3)_x\| \|z\| + 2L \rho_2 \|(f_3)_x\| \|z\|. \tag{4.158}
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando as desigualdades (4.135), (4.146), (4.147) e (4.148) na expressão (4.158), obtemos:

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 & \leq 3C|\lambda|^{2-2\alpha} \|U\|_{\mathcal{H}} \|W\|_{\mathcal{H}} + 3C\|W\|_{\mathcal{H}}^2 + 3C\rho_1 |\lambda|^{2-2\beta} \|U\|_{\mathcal{H}} \|W\|_{\mathcal{H}} + 3C\rho_1 \|W\|_{\mathcal{H}}^2 \\
& + 3C\rho_2 |\lambda|^{2-2\theta} \|U\|_{\mathcal{H}} \|W\|_{\mathcal{H}} + 3C\rho_2 \|W\|_{\mathcal{H}}^2 + \widetilde{C}_1 \|U\|_{\mathcal{H}} \|W\|_{\mathcal{H}} + \widetilde{C}_2 \|W\|_{\mathcal{H}}^2 \\
& \leq 3\widetilde{C}_1 |\lambda|^{2-2\min\{\alpha, \beta, \theta\}} \|U\|_{\mathcal{H}} \|W\|_{\mathcal{H}} + \widetilde{C}_2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|W\|_{\mathcal{H}} + \widetilde{C}_3 \|W\|_{\mathcal{H}}^2,
\end{aligned}$$

onde $|\lambda| > 1$, $\widetilde{C}_1 = \max\{3C, 3C\rho_1, 3C\rho_2\}$, $\widetilde{C}_2 = \max\left\{2C(\varepsilon_1) + \frac{1}{\eta}, 2C(\varepsilon_2) + \frac{1}{\zeta}, 2C(\varepsilon_3) + \frac{1}{\xi}\right\}$ e $\widetilde{C}_3 = \max\left\{\frac{L}{a}, \frac{L}{k}, \frac{2L^2}{b}, \frac{2L}{b}\right\}$.

Aplicando a desigualdade de Young Generalizada para $\varepsilon=1/3$, obtém-se:

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{1}{2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{9\widetilde{C}_1^2}{2} |\lambda|^{4-4\min\{\alpha, \beta, \theta\}} \|W\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{3} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C(1/3)(\widetilde{C}_2)^2 \|W\|_{\mathcal{H}}^2 + \widetilde{C}_3 \|W\|_{\mathcal{H}}^2$$

Logo

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \widetilde{C} |\lambda|^{4-4\min\{\alpha, \beta, \theta\}} \|W\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall |\lambda| > 1,$$

onde $\widetilde{C} = \max\{27\widetilde{C}_1^2, 6C(1/3)(\widetilde{C}_2)^2, 6\widetilde{C}_3\}$.

Então:

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq \sqrt{\tilde{C}} |\lambda|^{2-2\min\{\alpha,\beta,\theta\}} \|W\|_{\mathcal{H}}; \forall |\lambda| > 1.$$

Assim, da equação resolvente (4.132), segue que:

$$\frac{\|U\|_{\mathcal{H}}}{\|W\|_{\mathcal{H}}} = \frac{\|(\lambda i I - \mathcal{A})^{-1} W\|_{\mathcal{H}}}{\|W\|_{\mathcal{H}}} \leq \sqrt{\tilde{C}} |\lambda|^{2-2\min\{\alpha,\beta,\theta\}}.$$

Portanto:

$$\frac{1}{|\lambda|^{2-2\min\{\alpha,\beta,\theta\}}} \|(\lambda i I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \sqrt{\tilde{C}}. \quad (4.159)$$

Como o operador \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações, do Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.29), temos que \mathcal{A} é um operador fechado. Assim, da Proposição 4.10 e do item (b) da Proposição 4.13 segue que $\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda i; \lambda \in \mathbb{R}\} = \emptyset$. Então o eixo imaginário está contido no conjunto resolvente do operador \mathcal{A} (isto é, $\{\lambda i; \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \rho(\mathcal{A})$). Portanto, a estimativa 4.159 nos permite aplicar o Teorema de Borichev-Tomilov (Teorema 2.39) e concluir que:

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} = \|e^{t\mathcal{A}} U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{M}{t^{\frac{1}{2-2\min\{\alpha,\beta,\theta\}}}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A})}; \forall U_0 \in D(\mathcal{A}),$$

onde $M > 0$ é uma constante. □

Teorema 4.17

Seja \mathcal{A} o operador definido em (4.34) e suponha que $\eta = 0$ ou $\zeta = 0$ ou $\xi = 0$. O C_0 -semigrupo de contrações $\{e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$ é polinomialmente estável sobre os pontos do conjunto $D(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{H})$. Mais precisamente, se $U_0 \in D(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{H})$, então existe $C > 0$ tal que:

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} = \|e^{t\mathcal{A}} U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{\max\{1, 2-2\min\{\alpha, \beta, \theta\}\}}}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A})}; \forall U_0 \in D(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{H}) \text{ e } t > 0.$$

onde $U: [0, t] \rightarrow \mathcal{H}$ é a solução do problema (4.35).

Demonstração. Se $\eta = 0$ ou $\zeta = 0$ ou $\xi = 0$, das Proposições 4.10 e 4.12, e do item (a) da Proposição 4.13, segue que $\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda i \in \mathbb{C}; \lambda \in \mathbb{R}\} = \{0\}$. Assim, pretendemos aplicar o Teorema de Batty-Chill-Tomilov (Teorema 2.40). Com efeito. Tomando $\gamma = 2 - 2\min\{\alpha, \beta, \theta\} > 0$, da desigualdade (4.159), segue que:

$$\|(\lambda i I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \tilde{C} |\lambda|^\gamma \sim O(|\lambda|^\gamma) \text{ quando } \lambda \rightarrow +\infty. \quad (4.160)$$

Por outro lado, do Lema 4.5, obtemos:

$$C(\omega, \delta, |\lambda|) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{2\omega-1} dy}{y^2 + \delta + |\lambda|} = C_1 (\delta + |\lambda|)^{\omega-1} \leq C_1 |\lambda|^{\omega-1}; \forall \lambda \neq 0 \quad (4.161)$$

e

$$D(\omega, \delta, |\lambda|) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|y|^{2\omega-1} dy}{(y^2 + \delta + |\lambda|)^2} = C_2 (\delta + |\lambda|)^{\omega-2} \leq C_2 |\lambda|^{-2}; \forall |\lambda| < 1. \quad (4.162)$$

Utilizando as desigualdades (4.161) e (4.162) para $\omega = \alpha, \beta, \theta$ e $\delta = \eta, \zeta, \xi$; procedendo de forma análoga a demonstração do Teorema 4.16 (Ver desigualdades (4.141)–(4.146)), obtemos:

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &\leq C|\lambda|^{2-2\alpha}\|U\|_{\mathcal{H}}\|W\|_{\mathcal{H}} + C|\lambda|^{-2\alpha}\|W\|_{\mathcal{H}}^2; \quad 0 < |\lambda| < 1, \\ \|w\|^2 &\leq C|\lambda|^{2-2\beta}\|U\|_{\mathcal{H}}\|W\|_{\mathcal{H}} + C|\lambda|^{-2\beta}\|W\|_{\mathcal{H}}^2; \quad 0 < |\lambda| < 1, \\ \|z\|^2 &\leq C|\lambda|^{2-2\theta}\|U\|_{\mathcal{H}}\|W\|_{\mathcal{H}} + C|\lambda|^{-2\theta}\|W\|_{\mathcal{H}}^2; \quad 0 < |\lambda| < 1.\end{aligned}$$

Agora, basta continuar procedendo de maneira similar a demonstração do Teorema 4.16. Nesse caso, obtemos:

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \tilde{C} \left(|\lambda|^{4-4\max\{\alpha, \beta, \theta\}} + |\lambda|^{-2\max\{\alpha, \beta, \theta\}} \right) \|W\|_{\mathcal{H}}^2; \quad 0 < |\lambda| < 1.$$

Como $\alpha, \beta, \theta < 1$, temos que $4 - 4\max\{\alpha, \beta, \theta\} > 0$. Portanto, fazendo $|\lambda| \rightarrow 0$, temos:

$$\begin{aligned}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \tilde{C} \left(|\lambda|^{4-4\max\{\alpha, \beta, \theta\}} + |\lambda|^{-2\max\{\alpha, \beta, \theta\}} \right) \|W\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq (\varepsilon + \tilde{C}) |\lambda|^{-2\max\{\alpha, \beta, \theta\}} \|W\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq (\varepsilon + \tilde{C}) |\lambda|^{-2} \|W\|_{\mathcal{H}}^2,\end{aligned}$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Então:

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq \sqrt{(\varepsilon + \tilde{C})} |\lambda|^{-1} \|W\|_{\mathcal{H}}, \text{ para } |\lambda| \rightarrow 0.$$

Assim, da equação resolvente (4.132), segue que:

$$\frac{\|(\lambda i I - \mathcal{A})^{-1}W\|_{\mathcal{H}}}{\|W\|_{\mathcal{H}}} = \frac{\|U\|_{\mathcal{H}}}{\|W\|_{\mathcal{H}}} \leq \sqrt{(\varepsilon + \tilde{C})} |\lambda|^{-1} \sim O(|\lambda|^{-\sigma}), \text{ para } |\lambda| \rightarrow 0,$$

onde $\sigma = 1$.

Portanto:

$$\|(\lambda i I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \sim O(|\lambda|^{-\sigma}), \text{ para } |\lambda| \rightarrow 0. \quad (4.163)$$

O operador \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações. Então do Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.29), temos que \mathcal{A} é um operador fechado. Como $\eta = 0$ ou $\zeta = 0$ ou $\xi = 0$, das Proposições 4.10 e 4.12, e do item (a) da Proposição 4.13, segue que $\sigma(\mathcal{A}) \cap \{\lambda i \in \mathbb{C}; \lambda \in \mathbb{R}\} = \{0\}$. Assim as estimativas (4.160) e (4.163) nos permite aplicar o Teorema de Batty-Chill-Tomilov (Teorema 2.40) e concluir que existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} = \|e^{t\mathcal{A}}U_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{\max\{1, 2-2\min\{\alpha, \beta, \theta\}\}}}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A})}; \quad \forall U_0 \in D(\mathcal{A}) \cap \mathcal{A}(\mathcal{H}) \text{ e } t > 0.$$

□

As taxas de decaimento polinomial estabelecidas nos Teoremas 4.16 e 4.17 elucidam a influência das ordens de amortecimento fracionário α, β, θ na dinâmica de dissipação de energia do sistema de ponte. O expoente de decaimento é inversamente proporcional a $\min\{\alpha, \beta, \theta\}$, indicando que

valores menores deste mínimo resultam em taxas de decaimento mais lentas (amortecimento mais fraco), enquanto valores maiores levam a uma dissipação de energia mais rápida (amortecimento mais forte).

Em contraste, o amortecimento clássico de ordem inteira ($\alpha = \beta = \theta = 1$) tipicamente induz decaimento exponencial, significativamente mais rápido que o polinomial. É crucial destacar que o amortecimento viscoso convencional, como operador diferencial, exibe um comportamento estritamente local, seu efeito depende apenas do estado instantâneo do sistema, desconsiderando seu histórico vibracional. Em oposição, o amortecimento fracionário, governado por um operador integral, possui não-localidade inerente e efeitos de memória. Esta propriedade permite capturar mais precisamente mecanismos globais de dissipação de energia, tornando-o particularmente adequado para modelar materiais viscoelásticos e sistemas estruturais complexos como pontes. Enquanto o amortecimento de ordem inteira fornece uma resposta instantânea, o fracionário incorpora todo o histórico dinâmico do sistema, gerando padrões de dissipação mais fisicamente realistas, embora com taxas de decaimento mais lentas.

As ordens fracionárias α, β, θ estão intrinsecamente ligadas às propriedades de memória e hereditariedade do material. Um valor menor do que $\min\{\alpha, \beta, \theta\}$ corresponde a efeitos de memória mais acentuados (retenção prolongada de energia), enquanto valores maiores indicam comportamento de amortecimento mais instantâneo. Em síntese, $\min\{\alpha, \beta, \theta\}$ serve como indicador-chave da eficiência do amortecimento no sistema de ponte: valores menores resultam em decaimento energético mais lento (amortecimento menos eficaz), enquanto valores maiores potencializam a dissipação. Estes resultados alinharam-se com a noção bem estabelecida de que o amortecimento fracionário interpola entre respostas puramente elásticas (sem dissipação) e totalmente viscosas (amortecimento forte), fornecendo um arcabouço mais abrangente para modelar dinâmicas estruturais complexas.

Capítulo 5

Sobre um modelo abstrato e não-linear de ponte suspensa do tipo Kirchhoff com amortecimento interno fracionário

Além do clássico modelo de vigas de Timoshenko, um dos modelos mais relevantes na teoria de vigas foi introduzido em 1876 por Kirchhoff (KIRCHOOF, 1876). Esse modelo descreve as vibrações transversais não lineares de uma corda tensionada e é caracterizado pela seguinte equação integro-diferencial:

$$w_{tt}(x, t) - m \left(\int_{\Omega} |\nabla w(x, t)|^2 dx \right) \Delta w(x, t) = f(x, t); \quad x \in \Omega \text{ e } t > 0. \quad (5.1)$$

A Equação (5.2) possui ampla aplicação em engenharia estrutural, particularmente na modelagem de pontes suspensas. Nesse contexto, ela descreve as vibrações do cabo principal, cujo vão é sustentado por cabos de ligação. A função $u = u(x, t)$ representa o deslocamento vertical do cabo principal, enquanto $w = w(x, t)$ corresponde à deflexão da linha média da viga em relação à sua configuração de referência. Assume-se que os cabos de suspensão comportam-se como molas elásticas lineares com rigidez $\tau > 0$. O termo não local $m \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u$ está associado à variação da tensão na viga devido à sua extensibilidade, um fenômeno crucial na análise de estruturas sob cargas dinâmicas.

A boa colocação do problema (5.2) com condições de contorno de Dirichlet tem sido extensivamente estudada na literatura. Trabalhos seminais, como os de (AROSIO, 1993; AROSIO; GARAVALDI, 1991; POKHOZHAEV, 1985), estabeleceram resultados fundamentais sobre existência, unicidade e regularidade de soluções. Recentemente, pesquisas têm se concentrado nos efeitos de diferentes mecanismos de amortecimento em sistemas de vigas de Kirchhoff. Por exemplo, (CHENG; DONG; REGAN, 2022) investigou a estabilização de vigas em movimento axial, empregando o método de aproximação de Faedo-Galerkin para analisar soluções sob amortecimento não linear com atraso

temporal. Adicionalmente, utilizando técnicas de Lyapunov, demonstrou-se estabilidade exponencial para o sistema em malha fechada. Em outra abordagem, (FEREIRA et al., 2022) obteve resultados de estabilidade exponencial e polinomial para uma equação de Kirchhoff com expoentes variáveis e atraso, explorando a desigualdade de Komornik.

Modelos não lineares baseados na teoria de Kirchhoff têm sido amplamente aplicados na análise de pontes suspensas, onde o deck é modelado como uma viga extensível. Nesse sentido, (PEREIRA; RAPOSO; CATTAI, 2022) estudou a existência e unicidade de soluções globais, bem como a estabilidade exponencial, para um sistema acoplado de vigas de Kirchhoff com amortecimento fraco e uma fonte logarítmica:

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - \bar{\omega} \Delta u_{tt} + M(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) (-\Delta u) + u_t = |u|^{p-2} u \ln |u|^k, \\ v_{tt} + \Delta^2 v - \bar{\omega} \Delta u_{tt} + M(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) (-\Delta v) + v_t = |v|^{p-2} v \ln |v|^k \\ u = \frac{\partial u}{\partial v} = 0 \text{ e } v = \frac{\partial v}{\partial u} = 0, \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), v(x, 0) = v_0 \text{ e } v_t(x, 0) = v_1(x). \end{cases}$$

Um aspecto central no estudo de sistemas não lineares é a análise de atratores globais. Nessa direção, (AOUADI, 2020) investigou a existência de atratores para um sistema termoelástico não linear com inércia rotacional e atraso temporal:

$$\begin{cases} u_{tt} - \bar{\omega} \Delta u_{tt} + \Delta^2 u - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u + \gamma \Delta \theta + \gamma_1 u_t + \gamma_2 u_t(x, t - \tau(t)) + f(u) = h(x), \\ \theta_t - \Delta \theta - \gamma \Delta u_t = 0, \\ u = \Delta u = \theta = 0, \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \theta(x, 0) = \theta_0(x), \\ u_t(x, t) = f_0(x, t), x \in \Omega \times (-\tau(0), 0). \end{cases}$$

Nesse modelo u representa o deslocamento vertical da placa, enquanto θ é a variação de temperatura do valor de referência de equilíbrio. A função não linear f e carga estática h satisfazem hipóteses adequadas, e $\tau(t)$ é um atraso variável. Utilizando o método de Galerkin, (AOUADI, 2020) demonstrou a existência de soluções globais e a compacidade de atratores, independentemente da inércia rotacional. Além disso, estabeleceu-se a dimensão fractal finita dos atratores sob condições específicas para as constantes γ_1 e γ_2 .

Destacamos que Ma Tu fu e Narciso em (MA; NARCISO, 2010) estudaram a existência de atrator global para o Equação de vigas de Kirchhoff com damping friccional não-linear:

$$u_{tt}(x, t) + \Delta^2 u(x, t) - m(\|\nabla u(t)\|^2) \Delta u(x, t) + f(u(x, t)) + g(u_t(x, t)) = h(x); x \in \Omega \text{ e } t > 0. \quad (5.2)$$

Em um contexto estocástico, (QIN; DU; LIN, 2017) explorou a existência de atratores aleatórios para equações de ponte suspensa do tipo Kirchhoff com amortecimento forte e ruído branco. Os autores provaram a existência e unicidade de soluções, além de estabelecerem a existência de atratores globais para o sistema dinâmico associado.

Inspirados pelos trabalhos de (PEREIRA; RAPOSO; CATTI, 2022; AOUADI, 2020; QIN; DU; LIN, 2017; MA; NARCISO, 2010) e pelos resultados obtidos no Capítulo 4 desta tese, propomos investigar a existência de soluções e atratores globais para um sistema não linear de ponte suspensa, no qual o deck é modelado pela teoria de vigas de Kirchhoff com amortecimento fracionário. Mais precisamente, consideramos o seguinte sistema:

$$u_{tt} - \Delta u + |u|^{\rho_1} - \tau(w - u) + c_1 \partial_t^{\alpha, \eta} u = f, \text{ sobre } \Omega \times (0, +\infty), \quad (5.3)$$

$$w_{tt} + \Delta^2 w - m \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right) \Delta w + |w|^{\rho_2} w + \tau(w - u) + c_2 \partial_t^{\beta, \zeta} w = g, \text{ sobre } \Omega \times (0, +\infty), \quad (5.4)$$

$$u = 0 \text{ e } w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, +\infty), \quad (5.5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad w(x, 0) = w_0(x) \text{ e } w_t(x, 0) = w_1(x), \text{ sobre } \Omega. \quad (5.6)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto limitado bem regular com fronteira $\partial\Omega$, $t \geq 0$ é a variável de tempo, $x \in \Omega$ a variável espacial, ν é o vetor normal unitário em $\partial\Omega$, exterior à Ω , $c_j > 0$ e $\partial_t^{\omega, \delta}$ é o operador derivada fracionária de Caputo exponencialmente modificada de ordem ω e peso δ .

A Equação (5.3) descreve as vibrações do cabo principal do qual o vão da ponte é suspenso pelos cabos de ligação, a Equação (5.4) representa a vibração do vão da ponte na direção vertical, a função $u = u(x, t)$ mede o deslocamento vertical do cabo principal e a função $w = w(x, t)$ representa a deflexão para baixo da linha média da viga no plano vertical em relação à configuração de referência. Presume-se que os cabos de suspensão sejam molas elásticas lineares com rigidez padrão $\tau > 0$. O termo não-local $m \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u$ está relacionado à variação de tensão na viga devido à sua extensibilidade.

Assumiremos as seguintes hipóteses técnicas:

$$\rho_1 > 1, \text{ se } N \in \{1, 2\} \quad \text{e} \quad 1 < \rho_1 \leq \frac{N}{N-2}, \text{ se } N \geq 3. \quad (5.7)$$

$$\rho_2 > 0, \text{ se } N \in \{1, 2\} \quad \text{e} \quad 0 < \rho_2 \leq \frac{2}{N-2}, \text{ se } N \geq 3. \quad (5.8)$$

$$m : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty] \text{ é uma função crescente de classe } C^1. \quad (5.9)$$

$$f, g \in L^2(\Omega) \text{ não dependem da variável temporal.} \quad (5.10)$$

Aplicando a Proposição 4.4, podemos reformular o problema (5.3)–(5.6) no seguinte sistema

ampliado equivalente:

$$u_{tt} - \Delta u + |u|^{\rho_1} - \tau(w - u) + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy = f, \quad (5.11)$$

$$(\varphi_1)_t(y) + (y^2 + \eta) \varphi_1(y) - p(y) u_t = 0, \quad (5.12)$$

$$w_{tt} + \Delta^2 w - m \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right) \Delta w + |w|^{\rho_2} w + \tau(w - u) + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) dy = g, \quad (5.13)$$

$$(\varphi_2)_t(y) + (y^2 + \zeta) \varphi_2(y) - q(y) w_t = 0, \quad (5.14)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad w|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5.15)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad w(x, 0) = w_0(x), \quad \text{e} \quad w_t(x, 0) = w_1(x), \quad (5.16)$$

$$\varphi_1(x, 0, y) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi_2(x, 0, y) = 0, \quad (5.17)$$

onde $x \in \Omega$, $t > 0$, $y \in \mathbb{R}$, $p(y) = |y|^{\frac{2\alpha-1}{2}}$, $q(y) = |y|^{\frac{2\beta-1}{2}}$, $\gamma_1 = \frac{c_1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$ e $\gamma_2 = \frac{c_2}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}$.

Este capítulo está dividido em duas seções. Na primeira, utilizamos a teoria de semigrupos de operadores lineares limitados, juntamente com os resultados de existência e unicidade de solução para o problema abstrato de Cauchy não linear apresentados no Capítulo 2, a fim de demonstrar a existência e unicidade de solução forte local para o problema (5.3)–(5.6). Em seguida, por meio de estimativas de energia, mostramos que essa solução é, na realidade, globalmente definida. Além disso, a partir de estimativas envolvendo a norma das derivadas da solução, obtemos resultados de regularidade que reforçam a robustez da análise.

Na segunda seção, com base na teoria de semigrupos de operadores não lineares contínuos desenvolvida na primeira parte do Capítulo 3, demonstramos que o semigrupo associado ao problema é gradiente e assintoticamente compacto, o que garante a existência de um atrator global caracterizado pelas soluções estacionárias do sistema. Mostramos ainda que esse semigrupo é assintoticamente quase estável, propriedade que conduz a duas consequências relevantes: a dimensão fractal do atrator é finita e as soluções do problema apresentam melhor regularidade.

Os resultados apresentados neste capítulo foram aceitos para publicação no periódico *Journal of Evolution Equations*, conforme o artigo ([JESUS et al., 2025](#)).

5.1 Boa-Colocação

Nesta seção, reescreveremos o problema (5.11)–(5.17) na forma de um problema abstrato de Cauchy não linear e mostraremos que o operador correspondente à parte linear é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações. Em seguida, provaremos que o operador que descreve a parte não linear é localmente Lipschitz, de modo que, aplicando os resultados de existência e unicidade apresentados na segunda seção do Capítulo 2, concluiremos que o problema (5.11)–(5.17), e portanto o problema (5.3)–(5.6) admite solução local.

Na sequência, deduziremos a energia total do sistema e, a partir de estimativas envolvendo seus termos, demonstraremos que a norma da solução permanece limitada em função do tempo t , o que confirma que a solução é globalmente definida. Finalmente, utilizando estimativas adicionais da norma da derivada da solução, obteremos regularidade para a solução forte global obtida.

5.1.1 Formulação do Semigrupo da Parte Linear e Existência de Solução Local

Queremos agora reescrever o problema (5.11)–(5.17) como um problema abstrato de Cauchy. Para isso, introduzimos a função vetorial $U = (u, w, v, \psi, \varphi_1, \varphi_2)$, em que $u_t = v$ e $w_t = \psi$.

Assim, temos:

$$\begin{cases} U'(t) - \mathcal{A}U(t) = F(U(t)); \quad t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (5.18)$$

onde $U_0 = (u_0, w_0, u_1, w_1, 0, 0)$, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador linear definido por:

$$\mathcal{A}U = \begin{pmatrix} v \\ \psi \\ \Delta u + \tau(w - u) - \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy \\ -\Delta^2 w - \tau(w - u) - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) dy \\ -(y^2 + \eta) \varphi_1(y) + p(y) v \\ -(y^2 + \zeta) \varphi_2(y) + q(y) w, \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

$F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é a aplicação definida por:

$$F(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -|u|^{\rho_1} + f \\ m \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right) \Delta w - |w|^{\rho_2} w + g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \times [L^2(\Omega)]^2 \times [L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))]^2 \quad (5.21)$$

e

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ (u, w, v, \psi, \varphi_1, \varphi_2) \left| \begin{array}{l} u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ w \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega), \\ v \in H_0^1(\Omega) \\ \psi \in H_0^2(\Omega) \\ \varphi_1, \varphi_2 \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega)), \\ |y| \varphi_j \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega)) (j = 1, 2), \\ -(y^2 + \eta) \varphi_1 + p(y) v \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega)), \\ -(y^2 + \zeta) \varphi_2 + q(y) \psi \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega)). \end{array} \right. \right\}, \quad (5.22)$$

Observe que $D(\mathcal{A})$ é denso em \mathcal{H} . Além disso, $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ é um espaço de Hilbert, com $\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle U, U \rangle_{\mathcal{H}}$, onde

$$\begin{aligned} \langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle \nabla u, \nabla \tilde{u} \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle v, \tilde{v} \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \Delta w, \Delta \tilde{w} \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \psi, \tilde{\psi} \rangle_{L^2(\Omega)} + \tau \langle w - u, \tilde{w} - \tilde{u} \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \gamma_1 \langle \varphi_1, \tilde{\varphi}_1 \rangle_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))} + \gamma_2 \langle \varphi_2, \tilde{\varphi}_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

para $U = (u, w, v, \psi, \varphi_1, \varphi_2)$ e $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{v}, \tilde{\psi}, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$.

Observação 5.1

Para simplificar a notação no que segue, indicaremos o produto interno e a norma de $L^2(\Omega)$ simplesmente por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\|\cdot\|$.

Proposição 5.2

O operador linear $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definido em (5.19) é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo (de operadores lineares limitados) de contrações sobre \mathcal{H} .

Demonstração. Segundo o item (i) do Teorema de Lummer-Phillips (Teorema (2.31)), devemos mostrar que o operador \mathcal{A} é dissipativo e maximal. Seja $U = (u, w, v, \psi, \varphi_1, \varphi_2) \in D(\mathcal{A})$. Então:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \bar{u} \, dx + \int_{\Omega} \Delta u \cdot \bar{v} \, dx + \tau \int_{\Omega} (w - u) \bar{v} \, dx - \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} p(y) \varphi_1(y) \bar{v} \, dx \, dy \\ &\quad + \int_{\Omega} \Delta \psi \cdot \bar{\Delta w} \, dx - \int_{\Omega} \Delta^2 w \cdot \bar{\psi} \, dx - \tau \int_{\Omega} (w - u) \bar{\psi} \, dx \\ &\quad - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} q(y) \varphi_2(y) \bar{\psi} \, dx \, dy + \tau \int_{\Omega} (\psi - v) \bar{(w - u)} \, dx \\ &\quad - \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 \, dx \, dy + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} p(y) \bar{\varphi}_1(y) v \, dx \, dy \\ &\quad - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} (y^2 + \zeta) |\varphi_2(y)|^2 \, dx \, dy + \gamma_2 \int_{\Omega} q(y) \bar{\varphi}_2(y) \psi \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Como $U \in D(\mathcal{A})$, segue que $v \in H_0^1(\Omega)$ e $\psi \in H_0^2(\Omega)$. Utilizando a Fórmula de Green, temos:

$$\int_{\Omega} \Delta u \bar{v} \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \bar{\nabla v} \, dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} \Delta^2 w \cdot \bar{\psi} \, dx = \int_{\Omega} \Delta w \cdot \bar{\Delta \psi} \, dx.$$

Simplificando os termos semelhantes, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} \left[\nabla v \cdot \nabla \bar{u} - \bar{\nabla v} \cdot \bar{\nabla u} \right] \, dx + \tau \int_{\Omega} [(\psi - v) \bar{(w - u)} - \bar{(\psi - v)} \bar{(w - u)}] \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} [\Delta \psi \cdot \bar{\Delta w} - \bar{\Delta \psi} \cdot \bar{\Delta w}] \, dx + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} p(y) [v \bar{\varphi}_1(y) - \bar{v} \bar{\varphi}_1(y)] \, dx \, dy \\ &\quad - \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 \, dx \, dy + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} q(y) [\psi \bar{\varphi}_2(y) - \bar{\psi} \bar{\varphi}_2(y)] \, dx \, dy \\ &\quad - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} (y^2 + \zeta) |\varphi_2(y)|^2 \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= 2i \int_{\Omega} \operatorname{Im}[\nabla v \overline{\nabla u}] dx + 2i\tau \int_{\Omega} \operatorname{Im}[(\psi - v)(\overline{w - u})] dx \\ &\quad + 2i \int_{\Omega} \operatorname{Im}[\Delta \psi \cdot \overline{\Delta w}] dx + 2i\gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} p(y) \operatorname{Im}[\nu \overline{\varphi_1(y)}] dx dy \\ &\quad - \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dx dy + 2i\gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} q(y) \operatorname{Im}[\psi \overline{\varphi_2(y)}] dx dy \\ &\quad - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} (y^2 + \zeta) |\varphi_2(y)|^2 dx dy. \end{aligned}$$

Finalmente, tomando a parte real, temos:

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} = -\gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dx dy - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} (y^2 + \zeta) |\varphi_2(y)|^2 dx dy \leq 0. \quad (5.24)$$

Portanto, o operador \mathcal{A} é dissipativo.

Mostraremos agora que \mathcal{A} é um operador maximal. Para tal, iremos provar que, dado $W \in \mathcal{H}$, existe um vetor $U \in D(\mathcal{A})$ tal que $(I - \mathcal{A})U = W$. Isto equivale a resolução do seguinte sistema de equações:

$$u - v = f_1, \quad (5.25)$$

$$v - \Delta u - \tau(w - u) + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy = g_1, \quad (5.26)$$

$$\varphi_1(y) + (y^2 + \eta) \varphi_1(y) - p(y) v = h_1(y), \quad (5.27)$$

$$w - \psi = f_2, \quad (5.28)$$

$$\psi + \Delta^2 w + \tau(w - u) + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) dy = g_2, \quad (5.29)$$

$$\varphi_2(y) + (y^2 + \eta) \varphi_2(y) - q(y) \psi = h_2(y), \quad (5.30)$$

onde $W = (f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2)$ e $U = (u, w, v, \psi, \varphi_1, \varphi_2)$.

De (5.25) e (5.27), segue que:

$$v = u - f_1 \quad \text{e} \quad \psi = w - f_2. \quad (5.31)$$

Substituindo (5.31) nas equações (5.27) e (5.30) respectivamente, obtemos:

$$\varphi_1(y) = \frac{h_1(y)}{y^2 + \eta + 1} - \frac{p(y)f_1}{y^2 + \eta + 1} + \frac{p(y)u}{y^2 + \eta + 1} \quad (5.32)$$

$$\varphi_2(y) = \frac{h_2(y)}{y^2 + \zeta + 1} - \frac{q(y)f_2}{y^2 + \zeta + 1} + \frac{q(y)w}{y^2 + \zeta + 1}. \quad (5.33)$$

Aplicando o Lema 4.5 às expressões (5.32) e (5.33), obtemos:

$$\gamma_1 \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy = \gamma_1 [H_1(x, \alpha, \eta, 1) + C(\alpha, \eta, 1)(u - f_1)], \quad (5.34)$$

$$\gamma_2 \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) dy = \gamma_2 [H_2(x, \beta, \zeta, 1) + C(\beta, \zeta, 1)(w - f_2)], \quad (5.35)$$

Aplicando as expressões (5.31), (5.34) e (5.35) nas equações (5.26) e (5.29) respectivamente, temos:

$$u - \Delta u - \tau(w - u) + \gamma_1 C(\alpha, \eta, 1)u = f_1 + g_1 + \gamma_1 C(\alpha, \eta, 1)f_1 - \gamma_1 H_1(x, \alpha, \eta, 1), \quad (5.36)$$

$$w + \Delta^2 w + \tau(w - u) + \gamma_2 C(\beta, \zeta, 1)w = f_2 + g_2 + \gamma_2 C(\beta, \zeta, 1)f_2 - \gamma_2 H_2(x, \beta, \zeta, 1). \quad (5.37)$$

Multiplicando as equações (5.36) e (5.37) por $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ e $\bar{w} \in H_0^2(\Omega)$ respectivamente, integrando sobre x em Ω e, em seguida, aplicando a Fórmula de Green, obtém-se o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} C_1 \int_{\Omega} u \bar{u} dx + \int_{\Omega} \nabla u \bar{\nabla} \bar{u} dx - \tau \int_{\Omega} (w - u) \bar{u} dx = \int_{\Omega} F_1 \bar{u} dx, \\ C_2 \int_{\Omega} w \bar{w} dx + \int_{\Omega} \Delta w \bar{\Delta} \bar{w} dx + \tau \int_{\Omega} (w - u) \bar{w} dx = \int_{\Omega} F_2 \bar{w} dx, \end{cases} \quad (5.38)$$

onde os coeficientes são dados por:

$$C_1 = 1 + \gamma_1 C(\alpha, \eta, 1) \quad \text{e} \quad C_2 = 1 + \gamma_2 C(\beta, \zeta, 1),$$

e os termos do lado direito são:

$$F_1 = [1 + \gamma_1 C(\alpha, \eta, 1)]f_1 + g_1 - \gamma_1 H_1(x, \alpha, \eta, 1) \quad \text{e} \quad F_2 = [1 + \gamma_2 C(\beta, \zeta, 1)]f_2 + g_2 - \gamma_2 H_2(x, \beta, \zeta, 1).$$

Assim, temos que $F_j \in L^2(\Omega)$ ($j = 1, 2$), uma vez que, pelo Lema 4.5, $H_j(x, \omega, \delta, 1) \in L^2(\Omega)$.

Agora, observe que o sistema (5.38) é equivalente ao problema variacional de encontrar um vetor $(u, w) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ tal que

$$\mathcal{B}((u, w), (\tilde{u}, \tilde{w})) = \mathcal{L}(\tilde{u}, \tilde{w}); \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{w}) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega), \quad (5.39)$$

onde $\mathcal{B} : [H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega)] \times [H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega)] \rightarrow \mathbb{C}$ é a forma sesquilinear definida por:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}((u, w), (\tilde{u}, \tilde{w})) = & C_1 \int_{\Omega} u \bar{u} dx + C_2 \int_{\Omega} w \bar{w} dx + \int_{\Omega} \nabla u \bar{\nabla} \bar{u} dx + \int_{\Omega} \Delta w \bar{\Delta} \bar{w} dx \\ & + \tau \int_{\Omega} (w - u) (\bar{\tilde{w}} - \bar{\tilde{u}}) dx, \end{aligned}$$

e $\mathcal{L} : H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ é a forma antilinear definida por:

$$\mathcal{L}(\tilde{u}, \tilde{w}) = \int_{\Omega} F_1 \bar{\tilde{u}} dx + \int_{\Omega} F_2 \bar{\tilde{w}} dx.$$

Primeiramente, note que \mathcal{B} é contínua. De fato, se $(u, w), (\tilde{u}, \tilde{w}) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$, então, das desigualdade de Cauchy-Schwarz e de Poincaré (Teorema 1.17 e Teorema 1.20), temos:

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}((u, w), (\tilde{u}, \tilde{w}))| & \leq C_1 |\langle u, \tilde{u} \rangle| + C_2 |\langle w, \tilde{w} \rangle| + |\langle \nabla u, \nabla \tilde{u} \rangle| + |\langle \Delta w, \Delta \tilde{w} \rangle| + \tau |\langle w - u, \tilde{w} - \tilde{u} \rangle| \\ & \leq \widetilde{C}_1 \|\nabla u\| \|\nabla \tilde{u}\| + \widetilde{C}_2 \|\Delta w\| \|\Delta \tilde{w}\| + T \|\Delta w\| \|\nabla \tilde{u}\| + T \|\nabla u\| \|\Delta \tilde{w}\| \\ & \leq C \cdot \|(u, w)\|_{H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega)} \|(\tilde{u}, \tilde{w})\|_{H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

onde $\widetilde{C}_1 = C^2(C_1 + \tau) + 1$, $\widetilde{C}_2 = C_0^2(C_2 + \tau) + 1$, $T = \tau CC_0$ e $\widetilde{C} = \max\{\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \widetilde{C}_3, T\}$.

Agora mostraremos que \mathcal{B} é coerciva. Para $(u, w) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$, da desigualdade de Young (Proposição A.3), segue que:

$$\begin{aligned} \|(u, w)\|_{H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega)}^2 &= (\|\nabla u\| + \|\Delta w\|)^2 \\ &\leq 2\|\nabla u\|^2 + 2\|\Delta w\|^2 \\ &\leq C_1\|u\|^2 + C_2\|w\|^2 + 2\|\nabla u\|^2 + 2\|\Delta w\|^2 + \tau\|w - u\|^2 \\ &\leq C \cdot \mathcal{B}((u, w), (u, w)) \end{aligned}$$

onde $C = \max\{C_1, C_2, \tau, 2\}$.

Por fim, dado $(\tilde{u}, \tilde{w}) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$, temos:

$$|\mathcal{L}(\tilde{u}, \tilde{w})| = |\langle F_1, \tilde{u} \rangle| + |\langle F_2, \tilde{w} \rangle| \leq C\|F_1\|\|\nabla \tilde{u}\| + C_0\cdot\|F_2\|\|\Delta \tilde{w}\| \leq \widetilde{C} \cdot \|(u, w)\|_{H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega)}^2,$$

onde $\widetilde{C} = \cdot \max\{C\|F_1\|, C_0\|F_2\|\}$.

Portanto, do Teorema de Lax-Milgram, existe uma única solução $(u, w) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ para o problema variacional (5.39).

Como $g_1, g_2 \in L^2(\Omega)$, pela regularidade do sistema de equações: (5.26) e (5.29), segue que $u \in H^2(\Omega)$ e $w \in H^4(\Omega)$. Além disso, como $f_1 \in H_0^1(\Omega)$ e $f_2 \in H_0^2(\Omega)$, definindo v e ψ como as expressões dadas em (5.31), segue que $v \in H_0^1(\Omega)$ e $\psi \in H_0^2(\Omega)$. Por outro lado, $h_1, h_2 \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$. Assim, definindo $\varphi_1(y)$ e $\varphi_2(y)$ pelas respectivas expressões dadas em (5.34) e (5.35), é evidente que $|y|\varphi_1 \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$, $|y|\varphi_2 \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$, $-(y^2 + \eta)\varphi_1 + p(y)v \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ e $-(y^2 + \zeta)\varphi_2 + q(y)\psi \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$.

Portanto $U = (u, w, v, \psi, \varphi_1, \varphi_2) \in D(\mathcal{A})$, e é solução do sistema (5.25)–(5.30). Isto é, satisfaz $(I - \mathcal{A})U = W$. Portanto \mathcal{A} é maximal. Logo, do Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 2.31) segue que o operador \mathcal{A} é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$ sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H} . \square

Proposição 5.3

O operador não linear $F: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definida em (5.20) é localmente Lipschitz.

Demonstração. Inicialmente defina $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\Psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, por $\Phi(s) = |s|^{\rho_1}$ e $\Psi(s) = |s|^{\rho_2}s$. Como $\rho_1 > 1$ e $\rho_2 > 0$ (ver hipóteses (5.7) e (5.8)), temos que $\Phi, \Psi \in C^1(\mathbb{R})$, com

$$\Phi'(s) = \rho_1|s|^{\rho_1-1} \quad \text{e} \quad \Psi'(s) = (\rho_2 + 1)|s|^{\rho_2}; \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (5.40)$$

De fato, para $\rho_1 > 1$ e $\rho_2 > 0$, temos que $\Phi'(s)$ e $\Psi'(s)$ são dadas pelas expressões em (5.40), para todo $s \neq 0$. Resta apenas mostrar que Φ' e Ψ' existem e são contínuas no ponto $s = 0$. Note que:

$$\Phi'(s) = \rho_1 s^{\rho_1-1} \quad \text{e} \quad \Psi'(s) = (\rho_2 + 1)s^{\rho_2}, \quad s > 0,$$

$$\Phi'(s) = -\rho_1(-s)^{\rho_1-1} \quad \text{e} \quad \Psi'(s) = -(\rho_2+1)(-s)^{\rho_2}, \text{ se } s < 0.$$

Assim:

$$\Phi'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(h) - \Phi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^{\rho_1}}{h} = 0, \text{ para } \rho_1 > 1,$$

$$\Psi'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Psi(h) - \Psi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h|^{\rho_2} = 0, \text{ para } \rho_2 > 0.$$

Como $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$, dados $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, do Teorema do Valor médio, existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$|\Phi(s_1) - \Phi(s_2)| \leq |\Phi'(s_0)| |s_2 - s_1|,$$

onde $s_0 = s_1 + \theta(s_2 - s_1)$, com $0 < \theta < 1$.

Então

$$\begin{aligned} | |s_2|^{\rho_1} - |s_1|^{\rho_1} | &\leq \rho_1 |s_0|^{\rho_1-1} |s_2 - s_1| \\ &= \rho_1 |s_1 + \theta(s_2 - s_1)|^{\rho_1-1} |s_2 - s_1| \end{aligned} \quad (5.41)$$

Agora, sejam $u, \tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$. fazendo $s_1 = \tilde{u}$ e $s_2 = u$, de (5.41), segue que:

$$\begin{aligned} | |u|^{\rho_1} - |\tilde{u}|^{\rho_1} | &\leq \rho_1 |\tilde{u} + \theta(u - \tilde{u})|^{\rho_1-1} |u - \tilde{u}| \leq \rho_1 (|\tilde{u}| + |u| + |\tilde{u}|)^{\rho_1-1} |u - \tilde{u}| \\ &\leq \rho_1 (2|\tilde{u}| + 2|u|)^{\rho_1-1} |u - \tilde{u}| \\ &\leq \rho_1 2^{\rho_1-1} (|\tilde{u}| + |u|)^{\rho_1-1} |u - \tilde{u}| \\ &\leq \rho_1 2^{\rho_1-1} 2^{\rho_1-1} (|\tilde{u}|^{\rho_1-1} + |u|^{\rho_1-1}) |u - \tilde{u}|. \end{aligned}$$

Portanto:

$$|\Phi(u) - \Phi(\tilde{u})| = | |u|^{\rho_1} - |\tilde{u}|^{\rho_1} | \leq 2^{2(\rho_1-1)} \rho_1 (|\tilde{u}|^{\rho_1-1} + |u|^{\rho_1-1}) |u - \tilde{u}|. \quad (5.42)$$

De maneira análoga, como $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$, dados $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, do Teorema do Valor médio, existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$| |s_2|^{\rho_2} - |s_1|^{\rho_2} | \leq \rho_1 |s_0|^{\rho_1-1} |s_2 - s_1| \leq (\rho_2 + 1) |s_1 + \theta(s_2 - s_1)|^{\rho_2} |s_2 - s_1|,$$

onde $s_0 = s_1 + \theta(s_2 - s_1)$, com $0 < \theta < 1$.

Portanto, fazendo $s_1 = \tilde{w} \in H_0^2(\Omega)$ e $s_2 = w \in H_0^2(\Omega)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} |\Psi(w) - \Psi(\tilde{w})| = | |w|^{\rho_2} - |\tilde{w}|^{\rho_2} | &\leq (\rho_2 + 1) |\tilde{w} + \theta(w - \tilde{w})|^{\rho_2} |w - \tilde{w}| \\ &\leq 2^{2\rho_2} (\rho_2 + 1) (|\tilde{w}|^{\rho_2} + |w|^{\rho_2}) |w - \tilde{w}|. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Para $N = 3$, temos que $1 < \rho_1 \leq \frac{N}{N-2}$ e $0 < \rho_2 \leq \frac{2}{N-2}$ (hipóteses (5.7) e (5.8)). Então:

$$2 \leq 2\rho_1 \leq \frac{2N}{N-2} \quad \text{e} \quad 2 \leq 2(\rho_2 + 1) \leq 2 \left(\frac{2}{N-2} + 1 \right) = \frac{2N}{N-2},$$

do Corolário 1.26, tem-se as seguintes imersões contínuas:

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho_1}(\Omega) \quad \text{e} \quad H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho_2+1)}(\Omega) \quad (5.44)$$

Observe que os itens (b) e (c) do Teorema 1.25 garantem as imersões (5.44), para o caso $N = 2$ e $N = 1$ respectivamente.

Como

$$\frac{\rho_1 - 1}{2\rho_1} + \frac{1}{2\rho_1} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\rho_2}{2(\rho_2 + 1)} + \frac{1}{2(\rho_2 + 1)} + \frac{1}{2} = 1,$$

aplicando a Desigualdade de Hölder (Proposição A.5), em (5.42) e (5.43), segue que:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (|u|^{\rho_1} - |\tilde{u}|^{\rho_1}) \phi \right| dx &\leq 2^{2(\rho_1-1)} \rho_1 \left(\int_{\Omega} |u|^{\rho_1-1} |u - \tilde{u}| \phi \, dx + \int_{\Omega} |\tilde{u}|^{\rho_1-1} |u - \tilde{u}| \phi \, dx \right) \leq \\ &2^{2(\rho_1-1)} \rho_1 \left[\left(\int_{\Omega} |u|^{2\rho_1} \, dx \right)^{\frac{\rho_1-1}{2\rho_1}} + \left(\int_{\Omega} |\tilde{u}|^{2\rho_1} \, dx \right)^{\frac{\rho_1-1}{2\rho_1}} \right] \left(\int_{\Omega} |u - \tilde{u}|^{2\rho_1} \, dx \right)^{\frac{1}{2\rho_1}} \left(\int_{\Omega} |\phi|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (|w|^{\rho_2} w - |\tilde{w}|^{\rho_2} w) z \right| dx &\leq 2^{2\rho_2} (\rho_2 + 1) \left(\int_{\Omega} |\tilde{w}|^{\rho_2} |w - \tilde{w}| z \, dx + \int_{\Omega} |w|^{\rho_2} |w - \tilde{w}| z \, dx \right) \leq \\ &2^{2\rho_2} (\rho_2 + 1) \left[\left(\int_{\Omega} |\tilde{w}|^{2(\rho_2+1)} \, dx \right)^{\frac{\rho_2}{2(\rho_2+1)}} + \left(\int_{\Omega} |w|^{2(\rho_2+1)} \, dx \right)^{\frac{\rho_2}{2(\rho_2+1)}} \right] \left(\int_{\Omega} |w - \tilde{w}|^{2(\rho_2+1)} \, dx \right)^{\frac{1}{2(\rho_2+1)}} \cdot \\ &\left(\int_{\Omega} |z|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

para toda função ϕ e z em $L^2(\Omega)$.

Assim, tomando $R > 0$ tal que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \|\tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)} < R$ e $\|w\|_{H_0^2(\Omega)}, \|\tilde{w}\|_{H_0^2(\Omega)} < R$, das imersões (5.44), para toda função, ϕ e z em $L^2(\Omega)$, obtemos:

$$\begin{aligned} |\langle |u|^{\rho_1} - |\tilde{u}|^{\rho_1}, \phi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} (|u|^{\rho_1} - |\tilde{u}|^{\rho_1}) \phi \right| dx \\ &\leq 2^{2(\rho_1-1)} \rho_1 \left(\|u\|_{L^{2\rho_1}(\Omega)}^{\rho_1-1} + \|\tilde{u}\|_{L^{2\rho_1}(\Omega)}^{\rho_1-1} \right) \|u - \tilde{u}\|_{L^{2\rho_1}(\Omega)} \|\phi\| \\ &\leq 2^{2(\rho_1-1)} \rho_1 C_1 \left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^{\rho_1-1} + \|\tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)}^{\rho_1-1} \right) \|u - \tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \|\phi\| \\ &\leq 2^{2\rho_1-1} \rho_1 C_1 R^{\rho_1-1} \|u - \tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \|\phi\|, \end{aligned} \quad (5.45)$$

onde C_1 é a constante da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho_1}(\Omega)$, e

$$\begin{aligned} |\langle |w|^{\rho_2} w - |\tilde{w}|^{\rho_2} \tilde{w}, \phi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} (|w|^{\rho_2} w - |\tilde{w}|^{\rho_2} \tilde{w}) z \right| dx \\ &\leq 2^{2\rho_2} (\rho_2 + 1) \left(\|w\|_{L^{2(\rho_2+1)}(\Omega)}^{\rho_2} + \|\tilde{w}\|_{L^{2(\rho_2+1)}(\Omega)}^{\rho_2} \right) \|w - \tilde{w}\|_{L^{2(\rho_2+1)}(\Omega)} \|z\| \\ &\leq 2^{2\rho_2} (\rho_2 + 1) C_2 \left(\|w\|_{H_0^2(\Omega)}^{\rho_2} + \|\tilde{w}\|_{H_0^2(\Omega)}^{\rho_2} \right) \|w - \tilde{w}\|_{H_0^2(\Omega)} \|z\| \\ &\leq 2^{2\rho_2+1} (\rho_2 + 1) C_2 R^{\rho_2} \|w - \tilde{w}\|_{H_0^2(\Omega)} \|z\| \end{aligned} \quad (5.46)$$

onde C_2 é a constante da imersão $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho_2+1)}(\Omega)$.

Por outro lado, da desigualdade de Cauchy-Schwarz, da hipótese (5.9) e do Teorema do Valor Médio, segue que:

$$\begin{aligned} & |m(\|\nabla \tilde{w}\|^2) \langle \Delta \tilde{w}, z \rangle - m(\|\nabla w\|^2) \langle \Delta w, z \rangle| \leq \\ & |m(\|\nabla \tilde{w}\|^2) \langle \Delta(\tilde{w} - w), z \rangle| + |[m(\|\nabla \tilde{w}\|^2) - m(\|\nabla w\|^2)] \langle \Delta w, z \rangle| \leq \\ & \max_{0 \leq s \leq R} m(s) \|\tilde{w} - w\|_{H_0^2(\Omega)} \|z\| + \max_{0 \leq s \leq R} |m'(s)| |\|\nabla \tilde{w}\|^2 - \|\nabla w\|^2| \|w\|_{H_0^2(\Omega)} \|z\| \leq \\ & \max_{0 \leq s \leq R} m(s) \|\tilde{w} - w\|_{H_0^2(\Omega)} \|z\| + \max_{0 \leq s \leq R} |m'(s)| |\|\nabla \tilde{w}\| + \|\nabla w\|| |\|\nabla \tilde{w}\| - \|\nabla w\|| \|w\|_{H_0^2(\Omega)} \|z\| \leq \\ & \max_{0 \leq s \leq R} m(s) \|\tilde{w} - w\|_{H_0^2(\Omega)} \|z\| + \max_{0 \leq s \leq R} |m'(s)| [\|\nabla \tilde{w}\| + \|\nabla w\|] \|\nabla \tilde{w} - \nabla w\| \|w\|_{H_0^2(\Omega)} \|z\|. \end{aligned}$$

Assim, da imersão $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$, existe uma constante $C_3 > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} & |m(\|\nabla \tilde{w}\|^2) \langle \Delta \tilde{w}, z \rangle - m(\|\nabla w\|^2) \langle \Delta w, z \rangle| \leq \\ & \max_{0 \leq s \leq R} m(s) \|\tilde{w} - w\|_{H_0^2(\Omega)} \|z\| + \max_{0 \leq s \leq R} |m'(s)| C_3 \left[(\|\tilde{w}\|_{H_0^2(\Omega)} + \|w\|_{H_0^2(\Omega)}) \|w\|_{H_0^2(\Omega)} \right] \|\tilde{w} - w\|_{H_0^2(\Omega)} \|z\| \\ & \leq \max_{0 \leq s \leq R} m(s) \|\tilde{w} - w\|_{H_0^2(\Omega)} \|z\| + 2C_3 R^2 \max_{0 \leq s \leq R} |m'(s)| \|\tilde{w} - w\|_{H_0^2(\Omega)} \|z\|. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Agora, obeserve que, de (5.45), (5.46) e (5.47), temos:

$$\| |u|^{\rho_1} - |\tilde{u}|^{\rho_1} \|_{(L^2(\Omega))'} \leq 2^{2\rho_1-1} \rho_1 C_1 R^{\rho_1-1} \|\tilde{u} - u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad (5.48)$$

e

$$\begin{aligned} & \|m(\|\nabla \tilde{w}\|^2) \Delta \tilde{w} - |\tilde{w}|^{\rho_2} \tilde{w} - m(\|\nabla w\|^2) \Delta w + |w|^{\rho_2} w\|_{(L^2(\Omega))'} \leq \\ & \|m(\|\nabla \tilde{w}\|^2) \Delta \tilde{w} - m(\|\nabla w\|^2) \Delta w\|_{(L^2(\Omega))'} + \| |w|^{\rho_2} w - |\tilde{w}|^{\rho_2} \tilde{w} \|_{(L^2(\Omega))'} \leq \\ & \left[2^{2\rho_2+1} (\rho_2+1) C_2 R^{\rho_2} + \max_{0 \leq s \leq R} m(s) + 2C_3 R^2 \max_{0 \leq s \leq R} |m'(s)| \right] \|\tilde{w} - w\|_{H_0^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Dados os pontos $U = (u, w, v, \psi, \varphi_1, \varphi_2)$ e $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{v}, \tilde{\psi}, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$ tais que $\|U\|_{\mathcal{H}} < R$ e $\|\tilde{U}\|_{\mathcal{H}} < R$, das desigualdades (5.48) e (5.49), obtemos:

$$\begin{aligned} & \|F(U) - F(\tilde{U})\|_{\mathcal{H}}^2 = \| |u|^{\rho_1} - |\tilde{u}|^{\rho_1} \|^2 + \|m(\|\nabla \tilde{w}\|^2) \Delta \tilde{w} - |\tilde{w}|^{\rho_2} \tilde{w} - m(\|\nabla w\|^2) \Delta w + |w|^{\rho_2} w \|^2 \\ & = \| |u|^{\rho_1} - |\tilde{u}|^{\rho_1} \|_{(L^2(\Omega))'}^2 + \|m(\|\nabla \tilde{w}\|^2) \Delta \tilde{w} - |\tilde{w}|^{\rho_2} \tilde{w} - m(\|\nabla w\|^2) \Delta w + |w|^{\rho_2} w\|_{(L^2(\Omega))'}^2 \\ & \leq C_4^2 \|\tilde{u} - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + C_5^2 \|\tilde{w} - w\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C^2 \left(\|\tilde{u} - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\tilde{w} - w\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned} \quad (5.50)$$

onde

$$C_4 = 2^{2\rho_1-1} \rho_1 C_1 R^{\rho_1-1}, \quad C_5 = 2^{2\rho_2+1} (\rho_2+1) C_2 R^{\rho_2} + \max_{0 \leq s \leq R} m(s) + 2C_3 R^2 \max_{0 \leq s \leq R} |m'(s)| \quad \text{e}$$

$$C = \max\{C_4, C_5\}.$$

Portanto, de (5.50), segue que:

$$\|F(U) - F(\tilde{U})\|_{\mathcal{H}} \leq C \left(\|\tilde{u} - u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\tilde{w} - w\|_{H_0^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}}; \quad \forall U, \tilde{U} \in B_R(0),$$

onde $B_R(0)$ é a bola aberta centrada na origem e raio R do espaço \mathcal{H} . \square

A Proposições 5.2 e 5.3 combinadas com o Teorema 2.22 implicam no seguinte resultado:

Teorema 5.4 (Existência de Solução Local)

Se $U_0 = (u_0, w_0, u_1, w_1, 0, 0) \in \mathcal{H}$, então existe $0 < t_{max} \leq +\infty$, tal que o Problema de Cauchy não linear (5.18) admite uma única solução branda (ver Definição 2.16)

$$U \in C^0([0, t_{max}); \mathcal{H}),$$

dada por:

$$U(t) = e^{t\mathcal{A}} U_0 + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}} F(U(s)) \, ds; \quad \forall t \in [0, t_{max}).$$

Se $U_0 \in D(\mathcal{A})$, então a solução obtida é uma solução forte (ver Definição (2.17)).

5.1.2 Existência e Unicidade de Solução Global

Observe que, da hipótese (5.9), segue que:

$$M'(s) = m(s) \quad \text{e} \quad m(s)s \geq M(s); \quad \forall s \geq 0, \quad (5.51)$$

onde $M(s) = \int_0^s m(\tau) \, d\tau$.

Proposição 5.5

A energia associada ao problema (5.11)–(5.17) é dada por:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u(x, t)|^2 dx + \frac{1}{\rho_1 + 1} \int_{\Omega} |u(x, t)|^{\rho_1 + 1} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta w(x, t)|^2 dx + \frac{1}{2} M \left(\int_{\Omega} |\nabla w(x, t)|^2 dx \right) \\ &+ \frac{1}{\rho_2 + 2} \int_{\Omega} |w(x, t)|^{\rho_2 + 2} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |(w - u)(x, t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t(x, t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w_t(x, t)|^2 dx \\ &+ \frac{\gamma_1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} |\varphi_1(x, t, y)|^2 dx dy + \frac{\gamma_2}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} |\varphi_2(x, t, y)|^2 dx dy - \int_{\Omega} [f(x)u(x, t) + g(x)w(x, t)] dx, \end{aligned} \quad (5.52)$$

e satisfaz:

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} (y^2 + \eta) |\varphi_1(x, t, y)|^2 dx dy - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} (y^2 + \zeta) |\varphi_2(x, t, y)|^2 dx dy \leq 0. \quad (5.53)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (5.11) por u_t , integrando em relação a x sobre Ω e utilizando as condição de bordo da função u (ver (5.15)), obtemos:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^{\rho_1} u_t dx - \tau \int_{\Omega} (w - u) u_t dx \\ &+ \gamma_1 \int_{\Omega} u_t \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy dx = \int_{\Omega} f u_t dx. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^{\rho_1+1} dx = \int_{\Omega} (\rho_1 + 1) |u|^{\rho_1} u_t dx,$$

temos que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\rho_1+1} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^{\rho_1+1} dx - \tau \int_{\Omega} (w - u) u_t dx \\ & + \gamma_1 \int_0^L u_t \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy dx = \int_{\Omega} f u_t dx. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Agora, multiplicando a equação (5.13) por w_t , integrando em relação a x sobre Ω e utilizando as condição de bordo da função w (ver (5.15)), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |w_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\Delta w|^2 dx - m \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right) \int_{\Omega} \Delta w w_t dx + \int_{\Omega} |w|^{\rho_2} w w_t dx \\ & + \tau \int_{\Omega} (w - u) w_t dx + \gamma_2 \int_{\Omega} w_t \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) dy dx = \int_{\Omega} g w_t dx. \end{aligned}$$

Note que:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |w|^{\rho_2+2} dx = \int_{\Omega} (\rho_2 + 2) |w|^{\rho_2} w w_t dx$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[M \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right) \right] &= m \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right) \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx = 2m \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right) \int_{\Omega} \nabla w \nabla w_t dx \\ &= -2m \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right) \int_{\Omega} \Delta w w_t dx. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |w_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta w|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} M \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right) + \frac{1}{\rho_2+2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |w|^{\rho_2+2} dx \\ & + \tau \int_{\Omega} (w - u) w_t dx + \gamma_2 \int_{\Omega} w_t \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) dy dx = \int_{\Omega} g w_t dx. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Somando (5.54) e (5.55), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\rho_1+1} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^{\rho_1+1} dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\Delta w|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} M \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right) \\ & + \frac{1}{\rho_2+2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |w|^{\rho_2+2} dx + \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |w - u|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |w_t|^2 dx \\ & + \gamma_1 \int_{\Omega} u_t \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy dx + \gamma_2 \int_{\Omega} w_t \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) dy dx = \int_{\Omega} [f u_t + g w_t] dx. \end{aligned}$$

Como f e g não dependem da variável t (ver hipótese (5.10)), temos que

$$\frac{d}{dt} (f u) = f u_t \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} (g w) = g w_t.$$

Portanto

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\rho_1+1} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^{\rho_1+1} dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\Delta w|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} M \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right) \\ & + \frac{1}{\rho_2+2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |w|^{\rho_2+2} dx + \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |w-u|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |w_t|^2 dx \\ & + \gamma_1 \int_{\Omega} u_t \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy dx + \gamma_2 \int_{\Omega} w_t \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) dy dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} [fu + gw] dx. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Por outro lado, ao multiplicar as equações (5.12) e (5.14) por $\gamma_1 \varphi_1$ e $\gamma_2 \varphi_2$ respectivamente, e, em seguida, integrar com respeito a variável y sobre \mathbb{R} , obtemos:

$$\frac{\gamma_1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |\varphi_1(y)|^2 dy + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dy = \gamma_1 u_t \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy \quad (5.57)$$

e

$$\frac{\gamma_2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |\varphi_2(y)|^2 dy + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) |\varphi_2(y)|^2 dy = \gamma_2 w_t \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) dy \quad (5.58)$$

Substituindo as expressões (5.57), e (5.58) em (5.56), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\rho_1+1} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^{\rho_1+1} dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\Delta w|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} M \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right) \\ & + \frac{1}{\rho_2+2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |w|^{\rho_2+2} dx + \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |w-u|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |w_t|^2 dx \\ & + \frac{\gamma_1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} |\varphi_1(y)|^2 dx dy + \frac{\gamma_2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} |\varphi_2(y)|^2 dx dy - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} [fu + gw] dx \\ & + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} (y^2 + \eta) |\varphi_1(y)|^2 dx dy + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} (y^2 + \zeta) |\varphi_2(y)|^2 dx dy = 0. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Denotando a energia $E(t)$ por (5.52), temos que (5.59) estabelece (5.53). \square

Teorema 5.6 (Existência e Unicidade de Solução Global)

Se $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $w_0 \in H_0^2(\Omega)$ e $u_1, w_1 \in L^2(\Omega)$, o problema de valor inicial e de contorno (5.3)–(5.6), admite uma única solução branda (u, w) com a seguinte regularidade:

$$\begin{cases} u \in C^0([0, +\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, +\infty); L^2(\Omega)) \\ w \in C^0([0, +\infty); H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, +\infty); L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (5.60)$$

Se $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $w_0 \in H_0^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $u_1 = w_1 = 0$, então o problema de valor inicial e de contorno (5.3)–(5.6) admite uma única solução forte (u, w) com a seguinte regularidade local:

$$\begin{cases} u \in L_{\text{loc}}^{\infty}(0, +\infty; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap W_{\text{loc}}^{1,\infty}(0, +\infty; H_0^1(\Omega)) \cap W_{\text{loc}}^{2,\infty}(0, +\infty; L^2(\Omega)) \\ w \in L_{\text{loc}}^{\infty}(0, +\infty; H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap W_{\text{loc}}^{1,\infty}(0, +\infty; H_0^2(\Omega)) \cap W_{\text{loc}}^{2,\infty}(0, +\infty; L^2(\Omega)) \end{cases} \quad (5.61)$$

e a seguinte regularidade global:

$$\begin{cases} u \in L^{\infty}(0, +\infty; H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, +\infty; L^2(\Omega)) \\ w \in L^{\infty}(0, +\infty; H_0^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, +\infty; L^2(\Omega)) \end{cases} \quad (5.62)$$

Demonstração. Sejam $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $w_0 \in H_0^2(\Omega)$ e $u_1, w_1 \in L^2(\Omega)$. Então $U_0 = (u_0, w_0, u_1, w_1, 0, 0) \in \mathcal{H}$. Assim, do Teorema 5.4, existe $0 < t_{\max} \leq +\infty$ e uma função $U \in C^0([0, t_{\max}; \mathcal{H}])$; $U(t) = (u(t), w(t), v(t), \psi(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t))$ que é uma solução branda para problema (5.20) em $[0, t_{\max}]$, e portanto uma solução branda local para o problema (5.11)–(5.17). Em coordenadas, temos:

$$\begin{cases} u \in C^0([0, t_{\max}); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, t_{\max}); L^2(\Omega)) \\ w \in C^0([0, t_{\max}); H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, t_{\max}); L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (5.63)$$

Se caso $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $w_0 \in H_0^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ e $u_1 = w_1 = 0$, temos $U_0 = (u_0, w_0, u_1, w_1, 0, 0) \in D(\mathcal{A})$, onde $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador linear definido em (5.19). Assim, do Teorema 5.4, temos que $U : [0, t_{\max}] \rightarrow \mathcal{H}$; $U(t) = (u(t), w(t), v(t), \psi(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t))$ é uma solução forte local para problema (5.20), e portanto uma solução forte local para o problema (5.11)–(5.17) (ver Definição 2.13). Então:

- (i) U é diferenciável em quase todo ponto $t \in [0, t_{\max}]$;
- (ii) $U_t \in L^1(0, t_{\max}; \mathcal{H})$;
- (iii) $U(0) = U_0 = (u_0, w_0, u_1, w_1, 0, 0)$ e $U_t(t) - \mathcal{A}U(t) = F(t, U(t))$, em quase todo ponto $t \in [0, +t_{\max}]$.

Em termos das componentes, temos que: u , u_t , w e w_t são diferenciáveis em quase todo ponto $t \in [0, t_{\max}]$. Além disso:

$$\begin{cases} u_t \in L^1(0, t_{\max}; H_0^1(\Omega)) \\ w_t \in L^1(0, t_{\max}; H_0^2(\Omega)) \\ u_{tt} \in L^1(0, t_{\max}; L^2(\Omega)) \\ w_{tt} \in L^1(0, t_{\max}; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (5.64)$$

Considere a energia $E : [0, t_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$ associada a essa solução. Da Proposição 5.5 temos que $E(t)$ é dado por (5.52), e sua derivada $E'(t)$ satisfaz (5.53). Então $E(t) \leq E(0)$ para todo $0 < t < t_{\max}$, e portanto, dado $U(t) = (u(t), w(t), u_t(t), w_t(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)) \in D(\mathcal{A})$, temos:

$$\frac{1}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq E(t) + \int_{\Omega} [fu(t) + gw(t)] dx \leq E(0) + \int_{\Omega} [fu(t) + gw(t)] dx. \quad (5.65)$$

Por outro lado, da desigualdade de Cauchy-Schwarz e da desigualdade de Young Generalizada (Corolário A.4) e a desigualdade de Poincaré obtemos:

$$\int_{\Omega} fu_t(t) dx \leq \varepsilon_1 \|u\|^2 + C(\varepsilon_1) \|f\|^2 \leq \varepsilon_1 C_1 \|\nabla u\|^2 + C(\varepsilon_1) \|f\|^2 \quad (5.66)$$

e

$$\int_{\Omega} gw_t(t) dx \leq \varepsilon_2 \|w\|^2 + C(\varepsilon_2) \|g\|^2 \leq \varepsilon_2 C_2 \|\Delta w\|^2 + C(\varepsilon_2) \|g\|^2 \quad (5.67)$$

onde $C_1, C_2 > 0$ e ε_1 e ε_2 são números positivos a escolher.

Substituindo (5.66) e (5.67) em (5.65), e utilizando as Desigualdade de Cauchy-Schwarz e Young, obtemos:

$$\frac{1}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 - \varepsilon_1 C_1 \|\nabla u\|^2 - \varepsilon_2 C_2 \|\Delta w\|^2 \leq E(0) + C(\varepsilon_1) \|f\|^2 + C(\varepsilon_2) \|g\|^2,$$

e tomando $\varepsilon_1 = 1/(4C_1)$ e $\varepsilon_2 = 1/(4C_2)$, obtemos:

$$\frac{1}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq E(0) + C(\varepsilon_1) \|f\|^2 + C(\varepsilon_2) \|g\|^2. \quad (5.68)$$

Note que $M(\|\nabla w\|^2) \geq 0$ para todo $w \in H_0^2(\Omega)$ (ver (5.51)). Como $L^{2\rho_1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho_1+1}(\Omega)$ e $L^{2(\rho_1+1)}(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho_2+2}(\Omega)$, pois $2\rho_1 > \rho_1 + 1$ e $2(\rho_2 + 1) > \rho_2 + 2$. Como $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $w_0 \in H_0^2(\Omega)$ e $u_1, w_1, f, g \in L^2(\Omega)$, segue que:

$$\begin{aligned} E(0) &\leq \left(1 + \frac{C_1}{2}\right) \|\nabla u_0\|^2 + \frac{2}{\rho_1+1} \|u_0\|_{L^{\rho_1+1}(\Omega)}^{\rho_1+1} + \left(1 + \frac{C_2}{2}\right) \|\Delta w_0\|^2 + M(\|\nabla w_0\|) \\ &\quad + \frac{2}{\rho_2+2} \|w_0\|_{L^{\rho_2+2}(\Omega)}^{\rho_2+2} + \tau \|w_0 - u_0\|^2 + \|u_1\|^2 + \|w_1\|^2 + \frac{1}{2} \|f\|^2 + \frac{1}{2} \|g\|^2 < \infty. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Finalmente, de (5.68) e (5.69), existe constante $C_3 > 0$ tal que:

$$\frac{1}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq E(0) + C(\varepsilon_0) \|f\|^2 + C(\varepsilon_2) \|g\|^2 \leq C_3; \quad \forall 0 < t < t_{\max}. \quad (5.70)$$

De (5.70), segue que:

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2C_3 < \infty. \quad (5.71)$$

Assim, o limite (5.71) e o Teorema 2.20, garantem que $t_{\max} = +\infty$.

Em resumo, dadas as funções $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $w_0 \in H_0^2(\Omega)$ e $u_1, w_1 \in L^2(\Omega)$, existe uma única solução branda (u, w) satisfazendo (5.60). Agora, se $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $w_0 \in H_0^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $u_1 = w_1 = 0$, então (u, w) é uma solução forte, e portanto, as funções u , u_t , w , w_t são diferenciáveis em quase todo ponto $t \geq 0$, e

$$\begin{cases} u_t \in L^1(0, +\infty; H_0^1(\Omega)) \\ w_t \in L^1(0, +\infty; H_0^2(\Omega)) \\ u_{tt} \in L^1(0, +\infty; L^2(\Omega)) \\ w_{tt} \in L^1(0, +\infty; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (5.72)$$

Além disso, a estimativa (5.70) combinada com (5.72), garantem as seguintes regularidade:

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0, +\infty; H_0^1(\Omega)) \\ w \in L^\infty(0, +\infty; H_0^2(\Omega)) \\ u_t \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)) \cap L^1(0, +\infty; H_0^1(\Omega)) \\ w_t \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)) \cap L^1(0, +\infty; H_0^2(\Omega)) \\ u_{tt} \in L^1(0, +\infty; L^2(\Omega)) \\ w_{tt} \in L^1(0, +\infty; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (5.73)$$

Para obter uma melhor regularidade, derive as equações do sistema (5.11)–(5.14) em relação a variável t . Assim, obtemos:

$$u_{ttt} - \Delta u_t + \rho_1 |u|^{\rho_1-1} u_t - \tau(w_t - u_t) + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} p(y)(\varphi_1)_t(y) dy = 0, \quad (5.74)$$

$$\begin{aligned} w_{ttt} + \Delta^2 w_t - 2m'(\|\nabla w\|^2) \langle \nabla w, \nabla w_t \rangle \Delta w - m(\|\nabla w\|^2) \Delta w_t + \rho_2 |w|^{\rho_2-1} w_t w + |w|^{\rho_2} w_t \\ + \tau(w_t - u_t) + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} q(y)(\varphi_2)_t(y) dy = 0, \end{aligned} \quad (5.75)$$

$$(\varphi_1)_{tt}(y) + (y^2 + \eta)(\varphi_1)_t(y) - p(y)u_{tt} = 0, \quad (5.76)$$

$$(\varphi_2)_{tt}(y) + (y^2 + \zeta)(\varphi_2)_t(y) - q(y)w_{tt} = 0. \quad (5.77)$$

Multiplicando as equações (5.74) e (5.75) por u_{tt} e w_{tt} , respectivamente, em seguida somando-as, integrando em relação à variável x sobre Ω , e utilizando as condições de contorno (5.15), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{tt}\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_{tt}\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta w_t\|^2 + \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \|w_t - u_t\|^2 \\ & + \gamma_1 \int_{\Omega} u_{tt} \int_{\mathbb{R}} p(y)(\varphi_1)_t(y) dy + \gamma_2 \int_{\Omega} w_{tt} \int_{\mathbb{R}} q(y)(\varphi_2)_t(y) dy \\ & = -\rho_1 \int_{\Omega} |u|^{\rho_1-1} u_t u_{tt} dx - (\rho_2 + 1) \int_{\Omega} |w|^{\rho_2} w_t w_{tt} dx + 2m'(\|\nabla w\|^2) \langle \nabla w, \nabla w_t \rangle \langle \Delta w, w_{tt} \rangle \\ & + m(\|\nabla w\|^2) \langle \Delta w_t, w_{tt} \rangle. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Multiplicando as equações (5.76) e (5.77) por $\gamma_1(\varphi_1)_t$ e $\gamma_2(\varphi_2)_t$, respectivamente, e substituindo-as em (5.78), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{tt}\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_{tt}\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta w_t\|^2 + \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \|w_t - u_t\|^2 + \frac{\gamma_1}{2} \frac{d}{dt} \|(\varphi_1)_t\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))}^2 \\ & + \frac{\gamma_2}{2} \frac{d}{dt} \|(\varphi_2)_t\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))}^2 \\ & = +2m'(\|\nabla w\|^2) \langle \nabla w, \nabla w_t \rangle \langle \Delta w, w_{tt} \rangle + m(\|\nabla w\|^2) \langle \Delta w_t, w_{tt} \rangle - \rho_1 \int_{\Omega} |u|^{\rho_1-1} u_t u_{tt} dx \\ & - (\rho_2 + 1) \int_{\Omega} |w|^{\rho_2} w_t w_{tt} dx - \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|(\varphi_1)_t(y)\|^2 dy - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) \|(\varphi_2)_t(y)\|^2 dy \end{aligned} \quad (5.79)$$

Como $m : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ é de classe C^1 , existe $C_4 > 0$ tal que $2m'(\|\nabla w\|) \leq C_4$. Assim, da estimativa (5.70) e da desigualdade de Young, tem-se:

$$\begin{aligned} 2m'(\|\nabla w\|) \langle \nabla w_t, \nabla w \rangle \langle \Delta w, w_{tt} \rangle & \leq C_4 \langle \Delta w_t, w \rangle \langle \Delta w, w_{tt} \rangle \leq C_4 \|\Delta w_t\| \cdot \|w\| \cdot \|\Delta w\| \cdot \|w_{tt}\| \\ & \leq 4C_3 C_4 \|\Delta w_t\| \cdot \|w_{tt}\| \\ & \leq \frac{C_5}{2} (\|w_{tt}\|^2 + \|\Delta w_t\|^2), \end{aligned} \quad (5.80)$$

onde $C_5 = 4C_3 C_4$.

Analogamente, obtém-se uma constante $C_6 > 0$ tal que

$$m(\|\nabla w\|^2) \langle \Delta w, w_{tt} \rangle \leq \frac{C_6}{2} (\|w_{tt}\|^2 + \|\Delta w_t\|^2). \quad (5.81)$$

Por outro lado, como $\frac{\rho_1-1}{2\rho_1} + \frac{1}{2\rho} + \frac{1}{2} = 1$, da Desigualdade de Hölder (Proposição (A.5)), da estimativa (5.70), da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho_1}(\Omega)$ e da desigualdade de Young, obtemos:

$$\begin{aligned} -\rho_1 \int_{\Omega} |u|^{\rho_1-1} u_t u_{tt} dx &\leq \rho_1 \|u\|_{L^{2\rho_1}(\Omega)}^{\rho_1-1} \|u_t\|_{L^{2\rho_1}(\Omega)} \|u_{tt}\| \leq \rho_1 (2C_3)^{\frac{\rho_1-1}{2}} (C_1)^{\rho_1} \|\nabla u_t\| \cdot \|u_{tt}\| \\ &\leq \frac{C_7}{2} (\|u_{tt}\|^2 + \|\nabla u_t\|^2), \end{aligned} \quad (5.82)$$

onde C_1 é a constante da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho_1}(\Omega)$ e $C_7 = \rho_1 (2C_3)^{\frac{\rho_1-1}{2}} (C_1)^{\rho_1}$.

Analogamente, obtém-se uma constante $C_8 > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} (\rho_2 + 1) \int_{\Omega} |w|^{\rho_2} w_t w_{tt} dx &\leq (\rho_2 + 1) \|w\|_{L^{2(\rho_2+1)}(\Omega)}^{\rho_2} \|w_t\|_{L^{2(\rho_2+1)}(\Omega)} \|w_{tt}\| \\ &\leq \frac{C_8}{2} (\|w_{tt}\|^2 + \|\Delta w_t\|^2). \end{aligned} \quad (5.83)$$

Agora, das desigualdades (5.79), (5.80), (5.81), (5.82) e (5.83), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|U_t(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq (1 + C_7) \|u_{tt}\|^2 + (1 + C_5 + C_6 + C_8) \|w_{tt}\|^2 + C_7 \|\nabla u_t\| + (C_5 + C_6 + C_8) \|\Delta w_t\|^2 \\ &+ \tau \|w_t - u_t\|^2 + \gamma_1 \|(\varphi_1)_t\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))}^2 + \gamma_2 \|(\varphi_2)_t\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))}^2 \leq C_9 \|U_t(t)\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned} \quad (5.84)$$

onde $C_9 = \max\{1 + C_7, 1 + C_5 + C_6 + C_8\}$ e $U(t) = (u(t), w(t)u_t(t), w_t(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t))$.

Agora, dado $T > 0$ arbitrário, integre a desigualdade (5.84) de 0 a $t \leq T$. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} \|U_t(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \|u_{tt}(0)\| + \|w_{tt}(0)\|^2 + \|\Delta u_t(0)\|^2 + \|\Delta w_t(0)\|^2 + \tau \|w(0) - u(0)\|^2 \\ &+ \gamma_1 \|(\varphi_1)_t(0)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))}^2 + \gamma_2 \|(\varphi_2)_t(0)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))}^2 + C_9 \int_0^t \|U_t(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds, \end{aligned} \quad (5.85)$$

para todo $0 < t \leq T$.

Como $u_1 = u_t(0) = u_1 = 0$ e $w_t(0) = w_1 = 0$, temos que:

$$\|\nabla u_t(0)\|^2 = \|\nabla u_1\|^2 = 0 < \infty \quad \text{e} \quad \|\Delta w_t(0)\|^2 = \|\Delta w_1\|^2 = 0 < \infty. \quad (5.86)$$

Além disso, temos

$$\|w_t(0) - u_t(0)\|^2 = \|w_1 - u_1\|^2 = 0 < \infty. \quad (5.87)$$

Fazendo $t = 0$ nas equações (5.12) e (5.14), e usando as condições iniciais em (5.17), obtemos:

$$(\varphi_1)_t(0, y) = p(y)u_1 = 0 \quad \text{e} \quad (\varphi_2)_t(0, y) = q(y)w_1 = 0; \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Portanto

$$\gamma_1 \|(\varphi_1)_t(0)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))}^2 = 0 < \infty \quad \text{e} \quad \gamma_2 \|(\varphi_2)_t(0)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))}^2 = 0 < \infty \quad (5.88)$$

Por outro lado, fazendo $t = 0$ na equação (5.11), obtemos:

$$\|u_{tt}(0)\| \leq \|u_0\|_{L^{2\rho_1}(\Omega)}^{\rho_1} + \|\Delta u_0\| + \tau \|w_0 - u_0\| + \|f\| := \widetilde{C}_1 < \infty, \quad (5.89)$$

uma vez que $f \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $w_0 - u_0 \in L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho_1}(\Omega)$.

Procedendo de maneira análoga, com a equação (5.13), obtemos:

$$\|w_{tt}(0)\| \leq m(\|\nabla w_0\|^2) \|\Delta w_0\| + \|w_0\|_{L^2(\rho_2+1)(\Omega)}^{\rho_2+1} + \|\Delta^2 w_0\| + \tau \|w_0 - u_0\| + \|g\| := \widetilde{C}_2 < \infty, \quad (5.90)$$

pois $g \in L^2(\Omega)$, $w_0 \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $w_0 - u_0 \in L^2(\Omega)$ e $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho_1}(\Omega)$.

Assim, utilizando as estimativas (5.86)–(5.90) em (5.85), obtemos:

$$\|U_t(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_{10} + C_9 \int_0^t \|U_t(s)\|_{\mathcal{H}}^2 ds; \quad \forall 0 < t \leq T, \quad (5.91)$$

onde $C_{10} = (\widetilde{C}_1)^2 + (\widetilde{C}_2)^2$.

Finalmente, aplicando o Lema de Gronwall (Proposição (A.7)), na estimativa (5.91), segue que:

$$\|U_t(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_{10} e^{C_9 t} \leq C_{10} e^{C_9 T} < \infty; \quad \forall 0 < t \leq T, \quad (5.92)$$

e portanto:

$$\begin{cases} u_t \in L_{loc}^\infty(0, +\infty; H_0^1(\Omega)) \\ w_t \in L_{loc}^\infty(0, +\infty; H_0^2(\Omega)) \\ u_{tt} \in L_{loc}^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)) \\ w_{tt} \in L_{loc}^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (5.93)$$

Por outro lado, como

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(t, y) dy \right| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{[p(y)]^2}{y^2 + \eta} dy \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\varphi_1(t, y)|^2 dy \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{C(\alpha, \eta, 0)} \left(\int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\varphi_1(t, y)|^2 dy \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi_1(t, y)\|^2 dy \leq \|(y^2 + \eta) \varphi_1(t) + p(y) u_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))}^2 = \|(\varphi_1)_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))}^2,$$

temos que:

$$\begin{aligned} \gamma_1 \left\| \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi(t, y) dy \right\|^2 &\leq \gamma_1 C(\alpha, \eta, 0) \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi_1(t, y)\|^2 dy \\ &\leq \gamma_1 C(\alpha, \eta, 0) \|(\varphi_1)_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))}^2 \\ &\leq 2C(\alpha, \eta, 0) \|U_t(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq 2C(\alpha, \eta, 0) C_{10} e^{C_9 T} < \infty; \end{aligned} \quad (5.94)$$

para todo $0 < t \leq T$.

De maneira análoga, obtemos:

$$\gamma_2 \left\| \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(t, y) dy \right\|^2 \leq 2C(\beta, \zeta, 0) C_{10} e^{C_9 T} < \infty; \quad \forall 0 < t \leq T. \quad (5.95)$$

Assim, das Equações (5.11) e (5.13), e das estimativas (5.65), (5.70), (5.92), (5.94) e (5.95), obtemos:

$$\|\Delta u(t)\| \leq \|u_{tt}(t)\| + \|u(t)\|_{L^{2\rho_1}(\Omega)}^{\rho_1} + \tau \|(w-u)(t)\| + \left\| \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(t, y) dy \right\| + \|f\|^2 < \infty, \quad (5.96)$$

para todo $0 < t < T$, e

$$\begin{aligned} \|\Delta^2 w(t)\| &\leq \|w_{tt}(t)\| + m(\|\nabla w\|^2) \|\Delta w\| + \|w(t)\|_{L^{2(\rho_2+1)}(\Omega)}^{\rho_2+1} + \tau \|(w-u)(t)\| \\ &\quad + \gamma_2 \left\| \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(t, y) dy \right\| + \|g\|^2 < \infty. \end{aligned} \quad (5.97)$$

para todo $0 < t < T$

Por fim, das regularidades obtidas em (5.73) e (5.93) e das estimativas (5.96) e (5.97), obtemos que a solução forte global (u, w) do problema (5.3)–(5.6) possui as seguintes regularidades:

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L_{loc}^\infty(0, +\infty; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, +\infty; H_0^1(\Omega)) \\ w \in L_{loc}^\infty(0, +\infty; H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, +\infty; H_0^2(\Omega)) \\ u_t \in L_{loc}^\infty(0, +\infty; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)) \cap L^1(0, +\infty; H_0^1(\Omega)) \\ w_t \in L_{loc}^\infty(0, +\infty; H_0^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)) \cap L^1(0, +\infty; H_0^2(\Omega)) \\ u_{tt} \in L_{loc}^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)) \cap L^1(0, +\infty; L^2(\Omega)) \\ w_{tt} \in L_{loc}^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)) \cap L^1(0, +\infty; L^2(\Omega)) \end{array} \right. \quad (5.98)$$

De (5.98) segue as regularidades em (5.61) e em (5.62). \square

5.2 Existência de Atrator Global

Nesta seção, investigamos a existência de um atrator global associado ao sistema (5.3)–(5.6), o qual, como mostrado anteriormente, pode ser reformulado no contexto de um problema de Cauchy não linear. Para tanto, empregamos a teoria de semigrupos de operadores contínuos, considerando a evolução no espaço de fase \mathcal{H} definida pelo semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ associado ao problema.

Demonstramos que $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ possui a propriedade de ser compactamente assintótico. Além disso, mostramos que o sistema admite uma função de Lyapunov natural, construída a partir da energia associada ao modelo, a qual decresce ao longo das trajetórias. Essa função desempenha papel central para caracterizar o semigrupo como gradiente, permitindo assim uma descrição mais fina da dinâmica assintótica. Tal estrutura, além da existência de atrator global, garante, em particular, que o atrator global tem dimensão fractal finita e coincide com a união das instáveis de seus equilíbrios.

Outro ponto relevante é a análise da quase-estabilidade das trajetórias, a qual fornece estimativas que, combinadas com o caráter dissipativo do sistema, asseguram que as soluções não apenas permanecem em conjuntos limitados, mas também convergem assintoticamente em sentido forte, obtendo assim uma melhor regularidade para as soluções.

5.2.1 Formulação do Semigrupo Não Linear

O sistema (5.11)–(5.17) é equivalente ao seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{F}(U); t > 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases}, \quad (5.99)$$

onde $\mathcal{F} := (\mathcal{A} + F) : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador não linear definido por:

$$\mathcal{F}(U) = \begin{pmatrix} v \\ \psi \\ \Delta u + \tau(w - u) - \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi_1(y) dy - |u|^{\rho_1} + f \\ -\Delta^2 w - \tau(w - u) - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} q(y) \varphi_2(y) dy + m \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right) \Delta w - |w|^{\rho_2} + g \\ -(y^2 + \eta) \varphi_1(y) + p(y) v \\ -(y^2 + \zeta) \varphi_2(y) + q(y) w, \end{pmatrix}, \quad (5.100)$$

onde $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é o espaço de fase definido em (5.21)–(5.23), $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador linear definido em (5.19), $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ o operador não linear definido em (5.20), $D(\mathcal{A})$ é o conjunto definido em (5.22), $U = (u, w, v, \psi, \varphi_1, \varphi_2)$ e $U_0 = (u_0, w_0, u_1, w_1, 0, 0)$.

O Teorema 5.4 e a estimativa (5.71) garantem que para cada $U_0 \in \mathcal{H}$, o problema (5.19), e portanto, o problema (5.99), admite uma única solução branda $U \in C^0([0, +\infty); \mathcal{H})$ dada por:

$$U(t) = e^{t\mathcal{A}} U_0 + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}} F(U(s)) ds.$$

Em termos das componentes u e w da solução U , temos as seguintes regularidades:

$$\begin{cases} u \in C^0([0, +\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, +\infty); L^2(\Omega)) \\ w \in C^0([0, +\infty); H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, +\infty); L^2(\Omega)) \end{cases} \quad (5.101)$$

Defina o semigrupo de operadores contínuos $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ pondo:

$$\begin{aligned} T(t) : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ U_0 &\longmapsto U(t) = e^{t\mathcal{A}} U_0 + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}} F(U(s)) ds. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Então $U \in C^0([0, +\infty); \mathcal{H})$ tal que

$$U(t) = T(t)U_0 = e^{t\mathcal{A}} U_0 + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}} \mathcal{F}(U(s)) ds,$$

é a única solução branda do problema (5.99).

5.2.2 Existência de Atrator Global

Proposição 5.7

Se $\eta, \zeta > 0$, então o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ definido em (5.102) é compactamente assintótico (em particular é assintoticamente suave).

Demonstração. Seja $B \subset \mathcal{H}$ um subconjunto limitado e sejam $U_0, V_0 \in B$; $U_0 = (u_0, w_0, u_1, w_1, 0, 0)$ e $V_0 = (v_0, z_0, v_1, z_1, 0, 0)$. Considere as solução brandas $U : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{H}$ e $V : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{H}$; $U(t) = (u(t), w(t), u_t(t), w_t(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t))$ e $V(t) = (v(t), z(t), v_t(t), z_t(t), \varphi_3(t), \varphi_4(t))$ do problema de Cauchy (5.99) para os dados iniciais U_0 e V_0 respectivamente.

Observe que, $X = U - V = (\Phi, \Psi, \Phi_t, \Psi_t, \widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2)$ é solução branda do seguinte problema:

$$\Phi_{tt} - \Delta\Phi + |u|^{\rho_1} - |v|^{\rho_1} - \tau(\Psi - \Phi) + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} p(y) \widetilde{\varphi}_1(y) dy = 0, \quad (5.103)$$

$$(\widetilde{\varphi}_1)_t(y) + (y^2 + \eta) \widetilde{\varphi}_1(y) - p(y) \phi_t = 0, \quad (5.104)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{tt} + \Delta^2\Psi - m \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right) \Delta w + m \left(\int_{\Omega} |\nabla z|^2 dx \right) \Delta z + |w|^{\rho_2} w - |z|^{\rho_2} z \\ + \tau(\Psi - \Phi) + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} q(y) \widetilde{\varphi}_2(y) dy = 0, \end{aligned} \quad (5.105)$$

$$(\widetilde{\varphi}_2)_t(y) + (y^2 + \zeta) \widetilde{\varphi}_2(y) - q(y) \psi_t = 0, \quad (5.106)$$

$$\Phi|_{\partial\Omega} = 0, \Psi|_{\partial\Omega} = 0 \text{ e } \frac{\partial\Psi}{\partial\nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5.107)$$

$$\Phi(x, 0) = (u_0 - v_0)(x), \text{ e } \Phi_t(x, 0) = (u_1 - v_1)(x), \quad (5.108)$$

$$\Psi(x, 0) = (w_0 - z_0)(x) \text{ e } \Psi_t(x, 0) = (w_1 - z_1)(x), \quad (5.109)$$

$$\widetilde{\varphi}_1(x, 0, y) = 0 \text{ e } \widetilde{\varphi}_2(x, 0, y) = 0, \quad (5.110)$$

Multiplicando o sistema (5.103)–(5.106) pelas funções Φ_t , $\widetilde{\varphi}_1$, Ψ_t e $\widetilde{\varphi}_2$ respectivamente, procedendo de forma similar a demonstração da Proposição 5.5, e utilizando as condições de fronteira em (5.107), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Phi_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Psi_t\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla\Phi\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta\Psi\|^2 + \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \|\Psi - \Phi\|^2 + \frac{\gamma_1}{2} \frac{d}{dt} \|\widetilde{\varphi}_1\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))}^2 \\ + \frac{\gamma_2}{2} \frac{d}{dt} \|\widetilde{\varphi}_2\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))}^2 + \langle |u|^{\rho_1} - |v|^{\rho_1}, \Phi_t \rangle + \langle |w|^{\rho_2} w - |z|^{\rho_2} z, \Psi_t \rangle - m \left(\|\nabla w\|^2 \right) \langle \Delta w, \Psi_t \rangle \\ + m \left(\|\nabla z\|^2 \right) \langle \Delta z, \Psi_t \rangle + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\widetilde{\varphi}_1(y)\|^2 dy + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) \|\widetilde{\varphi}_2(y)\|^2 dy = 0. \end{aligned} \quad (5.111)$$

Note que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[m \left(\|\nabla w\|^2 \right) \|\nabla\Psi\|^2 \right] &= -2m \left(\|\nabla w\|^2 \right) \langle \Delta\Psi, \Psi_t \rangle - 2m' \left(\|\nabla w\|^2 \right) \langle \Delta w, w_t \rangle \|\nabla\Psi\|^2 \\ &= 2m \left(\|\nabla w\|^2 \right) \langle \Delta z, \Psi_t \rangle - 2m \left(\|\nabla w\|^2 \right) \langle \Delta w, \Psi_t \rangle - 2m' \left(\|\nabla w\|^2 \right) \langle \Delta w, w_t \rangle \|\nabla\Psi\|^2. \end{aligned} \quad (5.112)$$

Definindo o funcional energia:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \frac{1}{2} \|\Phi_t(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_t(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla\Phi(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta\Psi(t)\|^2 + \frac{\tau}{2} \|\Psi(t) - \Phi(t)\|^2 \\ &+ \frac{\gamma_1}{2} \|\widetilde{\varphi}_1(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))}^2 + \frac{\gamma_2}{2} \|\widetilde{\varphi}_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \left[m \left(\|\nabla w(t)\|^2 \right) \|\nabla\Psi(t)\|^2 \right], \end{aligned} \quad (5.113)$$

e substituindo (5.112) em (5.111), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) &= -\langle |u|^{\rho_1} - |v|^{\rho_1}, \Phi_t \rangle - \langle |w|^{\rho_2} w - |z|^{\rho_2} z, \Psi_t \rangle + \left[m \left(\|\nabla w\|^2 \right) - m \left(\|\nabla z\|^2 \right) \right] \langle \Delta z, \Psi_t \rangle \\ &+ m' \left(\|\nabla w\|^2 \right) \langle \Delta w, w_t \rangle \|\nabla\Psi\|^2 - \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\widetilde{\varphi}_1(y)\|^2 dy - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) \|\widetilde{\varphi}_2(y)\|^2 dy. \end{aligned} \quad (5.114)$$

Das estimativas (5.45) e (5.46), e da Desigualdade de Young, obtemos:

$$\begin{aligned} |\langle |u|^{\rho_1} - |v|^{\rho_1}, \Phi_t \rangle| &\leq C_3 \|\Phi\| \cdot \|\Phi_t\| \\ &\leq \frac{(C_3)^2}{2} \|\Phi\|^2 + \frac{1}{2} \|\Phi_t\|^2 \end{aligned} \quad (5.115)$$

e

$$\begin{aligned} |\langle |w|^{\rho_2} w - |z|^{\rho_2} z, \Psi_t \rangle| &\leq C_4 \|\nabla \Psi\| \cdot \|\Psi_t\| \\ &\leq \frac{(C_4)^2}{2} \|\nabla \Psi\|^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_t\|^2, \end{aligned} \quad (5.116)$$

onde $C_3 = 2^{2\rho_1-1} \rho_1 C_1 R^{\rho_1-1}$ e $C_4 = 2^{2\rho_2+1} (\rho_2+1) C_2 R^{\rho_2}$, onde C_1 é a constante da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho_1}(\Omega)$, onde C_2 é a constante da imersão $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho_2+1)}(\Omega)$.

Como m é de Classe C^1 (ver (5.9)), segue que

$$m'(\|\nabla w\|^2) \langle \Delta w, w_t \rangle \|\nabla \Psi\|^2 \leq (C_5)^2 \|\nabla \Psi\|^2. \quad (5.117)$$

Além disso:

$$\begin{aligned} [m(\|\nabla w\|^2) - m(\|\nabla z\|^2) \langle \Delta z, \Psi_t \rangle] &\leq C_6 \|\nabla \Psi\| \cdot \|\Psi_t\| \leq \frac{1}{2} \|\nabla \Psi\|^2 + \frac{(C_6)^2}{2} \|\Psi_t\|^2 \\ &\leq \frac{(C_7)^2}{2} \|\nabla \Psi\|^2 + \frac{(C_6)^2}{2} \|\Psi_t\|^2. \end{aligned} \quad (5.118)$$

Agora, substituindo as expressões (5.115), (5.116), (5.117) e (5.118) em (5.114), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) &\leq \frac{(C_3)^2}{2} \|\Phi\|^2 + \frac{1}{2} \|\Phi_t\|^2 + \frac{(C_4)^2}{2} \|\nabla \Psi\|^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_t\|^2 + \frac{(C_7)^2}{2} \|\nabla \Psi\|^2 + \frac{(C_6)^2}{2} \|\Psi_t\|^2 + \\ &\quad (C_5)^2 \|\nabla \Psi\|^2 - \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\widetilde{\varphi_1}(y)\|^2 dy - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) \|\widetilde{\varphi_2}(y)\|^2 dy. \end{aligned} \quad (5.119)$$

Por outro lado, como

$$\frac{\gamma_1}{4} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{\varphi_1}(y)|^2 dy + \frac{\gamma_1}{2} \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\widetilde{\varphi_1}(y)\|^2 dy = \frac{\gamma_1}{2} \Phi_t \int_{\mathbb{R}} p(y) \widetilde{\varphi_1}(y) dy$$

e

$$\frac{\gamma_2}{4} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{\varphi_2}(y)|^2 dy + \frac{\gamma_2}{2} \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) \|\widetilde{\varphi_2}(y)\|^2 dy = \frac{\gamma_2}{2} \Psi_t \int_{\mathbb{R}} q(y) \widetilde{\varphi_2}(y) dy,$$

aplicando as estimativas:

$$\int_{\Omega} \Phi_t \int_{\mathbb{R}} p(y) \widetilde{\varphi_1}(y) dy dx \leq \varepsilon_1 C(\alpha, \eta, 0) \|\Phi_t\|^2 + C(\varepsilon_1) \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\widetilde{\varphi_1}(y)|^2 dy dx$$

e

$$\int_{\Omega} \Psi_t \int_{\mathbb{R}} q(y) \widetilde{\varphi_2}(y) dy dx \leq \varepsilon_2 C(\beta, \zeta, 0) \|\Psi_t\|^2 + C(\varepsilon_2) \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) |\widetilde{\varphi_2}(y)|^2 dy dx,$$

na desigualdade (5.119), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) + \frac{C_8}{2} \left(\gamma_1 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\widetilde{\varphi}_1(y)\|^2 dy + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) \|\widetilde{\varphi}_2(y)\|^2 dy \right) + \frac{1}{2} (\|\Phi_t\|^2 + \|\Psi_t\|^2) \\ \leq \frac{C_9}{2} (\|\Phi\|^2 + \|\nabla \Psi\|^2) \end{aligned} \quad (5.120)$$

$C_8 = \max\{1 + C(\varepsilon_1), 1 + C(\varepsilon_2)\}$, $\varepsilon_1 = 2/[\gamma_1 C(\alpha, \eta, 0)]$, $\varepsilon_2 = [2 + (C_6)^2]/[\gamma_2 C(\beta, \zeta, 0)]$ e
 $C_9 = \max\{(C_3)^2, (C_4)^2 + (C_5)^2 + (C_7)^2\}$.

Integrando a expressão (5.120) de t a $t+1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{E}(t+1) - \frac{1}{2} \mathcal{E}(t) + \frac{C_8}{2} \int_t^{t+1} \left(\gamma_1 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\widetilde{\varphi}_1(y)\|^2 dy + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) \|\widetilde{\varphi}_2(y)\|^2 dy \right) dt \\ + \frac{1}{2} \int_t^{t+1} (\|\Phi_t\|^2 + \|\Psi_t\|^2) dt \leq \frac{C_9}{2} \int_t^{t+1} (\|\Phi\|^2 + \|\nabla \Psi\|^2) dt. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{C_8}{2} \int_t^{t+1} \left(\gamma_1 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\widetilde{\varphi}_1(y)\|^2 dy + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) \|\widetilde{\varphi}_2(y)\|^2 dy \right) dt + \frac{1}{2} \int_t^{t+1} (\|\Phi_t\|^2 + \|\Psi_t\|^2) dt \\ \leq \frac{1}{2} \mathcal{E}(t) - \frac{1}{2} \mathcal{E}(t+1) + \frac{C_9}{2} \int_t^{t+1} (\|\Phi\|^2 + \|\nabla \Psi\|^2) dt. \end{aligned} \quad (5.121)$$

Agora, definindo:

$$F(t) = \left(\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+1) + C_9 \int_t^{t+1} (\|\Phi\|^2 + \|\nabla \Psi\|^2) dt \right)^{1/2}, \quad (5.122)$$

onde $C_9 := C_9(B)$ depende apenas da limitação uniforme dos dados iniciais no conjunto B .

De (5.121), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} \left(\gamma_1 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\widetilde{\varphi}_1(y)\|^2 dy + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) \|\widetilde{\varphi}_2(y)\|^2 dy \right) dt + \int_t^{t+1} (\|\Phi_t\|^2 + \|\Psi_t\|^2) dt \\ \leq \frac{1}{C_{10}} [F(t)]^2, \end{aligned} \quad (5.123)$$

onde $C_{10} = \min\{C_8/2, 1/2\}$.

Assim, do Teorema do Valor Médio para integrais, existem $t_1 \in [t + t + 1/4]$ e $t_2 \in [t + 3/4, t + 1]$ tais que:

$$\begin{aligned} \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\widetilde{\varphi}_1(t_i, y)\|^2 dy + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) \|\widetilde{\varphi}_2(t_i, y)\|^2 dy + \|\Phi_t(t_i)\|^2 + \|\Psi_t(t_i)\|^2 \\ \leq \frac{4}{C_{10}} [F(t)]^2; \quad \forall i = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.124)$$

Por outro lado, multiplicando as equações (5.103) e (5.105) por $\Phi = u - v$ e $\Psi = w - z$ respectivamente, integrando por partes e utilizando as condições de fronteira (5.107), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \Phi_t, \Phi \rangle - \|\Phi_t\|^2 + \|\nabla \Phi\|^2 + \int_{\Omega} (|u|^{\rho_1} - |v|^{\rho_1}) \Phi dx - \tau \langle \Psi - \Phi, \Phi \rangle \\ + \gamma_1 \int_{\Omega} \Phi \int_{\mathbb{R}} p(y) \widetilde{\varphi}_1(y) dy dx = 0 \end{aligned} \quad (5.125)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \langle \Psi_t, \Psi \rangle - \|\Psi_t\|^2 + \|\Delta \Psi\|^2 - m(\|\nabla w\|^2) \langle \Delta w, \Psi \rangle + m(\|\nabla z\|^2) \langle \Delta z, \Psi \rangle \\ & + \int_{\Omega} (|w|^{\rho_2} w - |z|^{\rho_2} z) \Psi \, dx + \tau \langle \Psi - \Phi, \Psi \rangle + \gamma_2 \int_{\Omega} \Psi \int_{\mathbb{R}} q(y) \widetilde{\varphi}_2(y) dy \, dx = 0 \end{aligned} \quad (5.126)$$

Como

$$m(\|\nabla w\|^2) \|\Psi\|^2 = -m(\|\nabla w\|^2) \langle \Delta \Psi, \Psi \rangle = -m(\|\nabla w\|^2) \langle \Delta w, \Psi \rangle + m(\|\nabla w\|^2) \langle \Delta z, \Psi \rangle,$$

somando as expressões (5.125) e (5.126), obtemos:

$$\begin{aligned} & \|\nabla \Phi\|^2 + \|\Delta \Psi\|^2 + \tau \|\Psi - \Phi\|^2 + m(\|\nabla w\|^2) \|\nabla \Psi\|^2 = -\frac{d}{dt} \langle \Phi, \Phi_t \rangle - \frac{d}{dt} \langle \Psi, \Psi_t \rangle \\ & + \|\Phi_t\|^2 + \|\Psi_t\|^2 + [m(\|\nabla w\|^2) - m(\|\nabla z\|^2)] \langle \Delta z, \Psi \rangle + \langle |v|^{\rho_1} - |u|^{\rho_1}, \Phi \rangle + \langle |w|^{\rho_2} w - |z|^{\rho_2} z, \Psi \rangle \\ & - \gamma_1 \int_{\Omega} \Phi \int_{\mathbb{R}} p(y) \widetilde{\varphi}_1(y) dy \, dx - \gamma_2 \int_{\Omega} \Psi \int_{\mathbb{R}} q(y) \widetilde{\varphi}_2(y) dy \, dx. \end{aligned} \quad (5.127)$$

Como

$$\int_{\Omega} \Phi \int_{\mathbb{R}} p(y) \widetilde{\varphi}_1(y) dy \, dx \leq \varepsilon_3 C(\alpha, \eta, 0) \|\Phi\|^2 + C(\varepsilon_3) \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\widetilde{\varphi}_1(y)|^2 dy \, dx$$

e

$$\int_{\Omega} \Psi \int_{\mathbb{R}} q(y) \widetilde{\varphi}_2(y) dy \, dx \leq \varepsilon_4 C(\beta, \zeta, 0) \|\Psi\|^2 + C(\varepsilon_4) \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) |\widetilde{\varphi}_2(y)|^2 dy \, dx,$$

das expressões (5.115), (5.116), (5.118) e (5.127), segue que:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}(t) & \leq -\frac{d}{dt} \langle \Phi, \Phi_t \rangle - \frac{d}{dt} \langle \Psi, \Psi_t \rangle + \|\Phi_t\|^2 + \|\Psi_t\|^2 + \frac{(C_7)^2}{2} \|\nabla \Psi\|^2 + \frac{(C_6)^2}{2} \|\Psi_t\|^2 + \frac{(C_3)^2}{2} \|\Phi\|^2 \\ & + \frac{1}{2} \|\Phi_t\|^2 + \frac{(C_4)^2}{2} \|\nabla \Psi\|^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_t\|^2 + C(\varepsilon_3) \|\Phi\|^2 + C(\varepsilon_4) \|\Psi\|^2 + \gamma_1 \varepsilon_3 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\widetilde{\varphi}_1(y)\|^2 dy \\ & + \gamma_2 \varepsilon_4 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) \|\widetilde{\varphi}_2(y)\|^2 dy + \gamma_1 \|\widetilde{\varphi}_1(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))}^2 + \gamma_2 \|\widetilde{\varphi}_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Agora, como $y^2 + \eta \geq \eta > 0$ e $y^2 + \zeta \geq \zeta > 0$, para todo $y \in \mathbb{R}$, então

$$\|\widetilde{\varphi}_1\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))} \leq \frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \delta) \|\widetilde{\varphi}_1(y)\|_{L^2(\Omega)}^2 dy \, dx.$$

e

$$\|\widetilde{\varphi}_2\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))} \leq \frac{1}{\zeta} \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) \|\widetilde{\varphi}_2(y)\|_{L^2(\Omega)}^2 dy \, dx.$$

Assim, da desigualdade de Poincaré, obtemos:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}(t) & \leq -\frac{d}{dt} \langle \Phi, \Phi_t \rangle - \frac{d}{dt} \langle \Psi, \Psi_t \rangle + \frac{3}{2} \|\Phi_t\|^2 + \frac{3 + (C_6)^2}{2} \|\Psi_t\|^2 + \frac{(C_3)^2 + 2C(\varepsilon_3)}{2} \|\Phi\|^2 \\ & + \frac{(C_7)^2 + (C_4)^2 + 2\widetilde{C}(\varepsilon_4)}{2} \|\nabla \Psi\|^2 + \frac{2\gamma_1}{\eta} \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\widetilde{\varphi}_1(y)\|^2 dy + \frac{2\gamma_2}{\zeta} \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) \|\widetilde{\varphi}_2(y)\|^2 dy, \end{aligned}$$

onde $\varepsilon_3 = 1/\eta$ e $\varepsilon_2 = 1/\zeta$.

Portanto

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &\leq -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \Phi, \Phi_t \rangle - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \Psi, \Psi_t \rangle + C_{11} (\|\Phi\|^2 + \|\nabla \Psi\|^2) \\ &+ C_{12} \left(\|\Phi_t\|^2 + \|\Psi_t\|^2 + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\widetilde{\varphi}_1(y)\|^2 dy + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) \|\widetilde{\varphi}_2(y)\|^2 dy \right),\end{aligned}\quad (5.128)$$

onde

$$C_{11} = \max \left\{ \frac{(C_3)^2 + 2C(\varepsilon_3)}{4}, \frac{(C_7)^2 + (C_4)^2 + 2\tilde{C}(\varepsilon_4)}{4}, \frac{1}{\eta}, \frac{1}{\zeta} \right\} \text{ e } C_{12} = \max \left\{ \frac{3}{4}, \frac{3 + (C_6)^2}{4} \right\}.$$

Agora, integrando na variável s de t_1 a t_2 , obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E}(s) ds &\leq -\frac{1}{2} \langle \Phi, \Phi_t \rangle \Big|_{s=t_1}^{s=t_2} - \frac{1}{2} \langle \Psi, \Psi_t \rangle \Big|_{s=t_1}^{s=t_2} + C_{11} \int_{t_1}^{t_2} (\|\Phi\|^2 + \|\nabla \Psi\|^2) ds \\ &+ C_{12} \int_{t_1}^{t_2} \left(\|\Phi_t\|^2 + \|\Psi_t\|^2 + \gamma_1 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\widetilde{\varphi}_1(y)\|^2 dy + \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \zeta) \|\widetilde{\varphi}_2(y)\|^2 dy \right) ds\end{aligned}\quad (5.129)$$

Da desigualdade de Poincaré, obtemos $\|\Phi(t_i)\| \leq \frac{1}{\sqrt{C}} \|\nabla \Phi(t_i)\|$ e $\|\Psi(t_i)\| \leq \frac{1}{\sqrt{C_0}} \|\Delta \Psi(t_i)\|$, e portanto, da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos:

$$\sum_{j=1}^2 |\langle \Phi, \Phi_s \rangle(t_i)| + \sum_{j=1}^2 |\langle \Psi, \Psi_s \rangle(t_i)| \leq \frac{1}{\sqrt{C}} \sum_{j=1}^2 \|\nabla \Phi(t_i)\| \cdot \|\Phi_s(t_i)\| + \frac{1}{\sqrt{C_0}} \sum_{j=1}^2 \|\Delta \Psi(t_i)\| \cdot \|\Psi_s(t_i)\|,$$

e como $t_1, t_2 \in [t, t+1]$, passando o supremo, obtemos:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^2 |\langle \Phi, \Phi_s \rangle(t_i)| + \sum_{j=1}^2 |\langle \Psi, \Psi_s \rangle(t_i)| &\leq \frac{1}{\sqrt{C}} (|\Phi_s(t_1)| + |\Phi_s(t_2)|) \sup_{t \leq s \leq t+1} |\nabla \Phi(s)| \\ &+ \frac{1}{\sqrt{C_0}} (|\Psi_s(t_1)| + |\Psi_s(t_2)|) \sup_{t \leq s \leq t+1} |\Delta \Psi(s)| \\ &\leq \frac{4}{\sqrt{C \cdot C_{10}}} F(t) \sup_{t \leq s \leq t+1} |\nabla \Phi(s)| + \frac{4}{\sqrt{C_0 \cdot C_{10}}} F(t) \sup_{t \leq s \leq t+1} |\Delta \Psi(s)|,\end{aligned}\quad (5.130)$$

pois, utilizando da estimativa (5.124), segue que $\|\Phi_t(t_i)\| \leq \frac{2}{\sqrt{C_{10}}} F(t)$ e $\|\Psi_t(t_i)\| \leq \frac{2}{\sqrt{C_{10}}} F(t)$.

Por tanto, aplicando as estimativas (5.123) e (5.130), na desigualdade (5.129), obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E}(s) ds &\leq \frac{2}{\sqrt{C \cdot C_{10}}} F(t) \sup_{t \leq s \leq t+1} \|\nabla \Phi\| + \frac{2}{\sqrt{C_0 \cdot C_{10}}} F(t) \sup_{t \leq s \leq t+1} \|\Delta \Psi\| + \frac{C_{12}}{C_{10}} [F(t)]^2 \\ &+ C_{11} \int_{t_1}^{t_2} (\|\Phi\|^2 + \|\nabla \Psi\|^2) ds,\end{aligned}$$

e portanto

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E}(s) ds \leq C_{13} F(t) \sup_{t \leq s \leq t+1} \sqrt{\mathcal{E}(s)} + \frac{C_{12}}{C_{10}} [F(t)]^2 + C_{11} \int_{t_1}^{t_2} (\|\Phi\|^2 + \|\nabla \Psi\|^2) ds,\quad (5.131)$$

onde $C_{13} = \max\{2/\sqrt{C_0 \cdot C_{10}}, 2/\sqrt{C \cdot C_{10}}\}$.

Aplicando a desigualdade de Young generalizada em (5.131), obtemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E}(s) ds \leq +C(\varepsilon_5) [F(t)]^2 + \varepsilon_5 \sup_{t \leq s \leq t+1} \mathcal{E}(s) + C_{11} \int_{t_1}^{t_2} (\|\Phi\|^2 + \|\nabla \Psi\|^2) ds.$$

Pelo Teorema do Valor Médio para integrais, existe $t_0 \in [t_1, t_2]$ tal que:

$$\mathcal{E}(t_0) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E}(s) ds.$$

Como $(t_2 - t_1 \geq \frac{1}{2})$, deduzimos que

$$\mathcal{E}(t_0) \leq 2 \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{E}(s) ds.$$

Combinando as duas desigualdades, obtemos

$$\mathcal{E}(t_0) \leq 2C(\varepsilon_5)[F(t)]^2 + 2\varepsilon_5 \sup_{t \leq s \leq t+1} \mathcal{E}(s) + 2C_{11} \int_{t_1}^{t_2} (|\Phi|^2 + |\nabla \Psi|^2) ds. \quad (5.132)$$

Por outro lado, a partir de (5.122), temos que $\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(t+1) + [F(t)]^2$. Isso significa que a variação da energia entre os instantes t e $t+1$ é controlada pela quantidade $[F(t)]^2$, juntamente com o termo integral.

Agora, como $t_0 \in [t, t+1]$, segue que o máximo de $\mathcal{E}(s)$ no intervalo $[t, t+1]$ não pode ultrapassar o valor em t_0 somado a essa correção. Mais precisamente, para todo $s \in [t, t+1]$, podemos estimar:

$$\mathcal{E}(s) \leq \mathcal{E}(t_0) + [F(t)]^2 + C_9 \int_t^{t+1} (|\Phi|^2 + |\nabla \Psi|^2) ds.$$

Tomando o supremo sobre todos $s \in [t, t+1]$, obtemos, portanto:

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} \mathcal{E}(s) \leq \mathcal{E}(t_0) + [F(t)]^2 + C_9 \int_t^{t+1} (\|\Phi\|^2 + \|\nabla \Psi\|^2) ds. \quad (5.133)$$

Agora, tomando $\varepsilon_5 = 1/4$ e substituindo a expressão (5.132) em (5.133), temos:

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} \mathcal{E}(s) \leq C_{14}[F(t)]^2 + C_{15} \int_t^{t+1} (\|\Phi\|^2 + \|\nabla \Psi\|^2) ds,$$

onde $C_{14} = 4C(1/4) + 2$ e $C_{15} = 4C_{11} + 2C_9$.

Dado $t^* > 0$, de (5.122), obtemos:

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} \mathcal{E}(s) \leq C_{14}(\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+1)) + C_{15} \sup_{0 \leq \sigma \leq t^*} \int_{\sigma}^{\sigma+1} (\|\Phi\|^2 + \|\nabla \Psi\|^2) ds; \quad \forall 0 \leq t \leq t^* \quad (5.134)$$

Assim, de (5.113), (5.134) e do Lema de Nakao (Lema A.13), segue que:

$$\frac{1}{2} \|X(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \mathcal{E}(t) \leq C_{16} e^{-\theta t} + C_{15} \sup_{0 \leq \sigma \leq t^*} \int_{\sigma}^{\sigma+1} (\|\Phi\|^2 + \|\nabla \Psi\|^2) ds; \quad \forall 0 \leq t \leq t^*, \quad (5.135)$$

onde

$$C_{16} = \frac{1 + C_{14}}{C_{14}} \sup_{0 \leq s \leq 1} \mathcal{E}(s) \quad \text{e} \quad \theta = \ln C_{16}.$$

Finalmente, dado $\varepsilon > 0$, escolha uma número real $t^* > 0$ suficientemente grande, tal que $\sqrt{C_{16}} e^{-\frac{\theta}{2} t^*} < \varepsilon$, e defina:

$$\begin{aligned} f_{t^*} : B_0 \times B_0 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (U_0, V_0) &\longrightarrow C_{B_0} \sup_{0 \leq \sigma \leq t^*} \left(\int_{\sigma}^{\sigma+1} (\|u - v\|^2 + \|\nabla w - \nabla z\|^2) ds \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (5.136)$$

onde $U_0 = (u_0, w_0, u_1, w_1, 0, 0)$, $V_0 = (v_0, z_0, v_1, z_1, 0, 0)$, $C_{B_0} = \sqrt{C_{15}}$, B_0 é a bola fechada centrada na origem e raio $\sqrt{2C_3}$ com respeito a norma do espaço \mathcal{H} e $C_3 > 0$ é a constante obtida na estimativa (5.70).

Observe que, de (5.135), segue que, dado $\varepsilon > 0$, existe $t^* := t^*(\varepsilon, B_0)$ tal que:

$$\|T(t^*)U_0 - T(t^*)V_0\|_{\mathcal{H}} = \|U(t^*) - V(t^*)\|_{\mathcal{H}} = \|X(t^*)\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon + f_{t^*}(U_0, V_0); \forall U_0, V_0 \in B_0. \quad (5.137)$$

Assim, diante da Proposição 3.26, resta apenas mostrar que f_{t^*} é uma função contrativa sobre $B_0 \times B_0$ (Definição 3.25). Com efeito, seja $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B_0$; $U_n = ((u_0)_n, (w_0)_n, (u_1)_n, (w_1)_n, 0, 0)$ uma sequência de valores iniciais em B_0 . Queremos mostrar que existe uma subsequência (U_{n_k}) de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} f_{t^*}(U_{n_k}, U_{n_l}) = 0. \quad (5.138)$$

Como B_0 é limitado e invariante sob $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, as solução $(u_n, w_n, (u_t)_n, (w_t)_n, (\varphi_1)_n, (\varphi_2)_n)$ são uniformemente limitadas em \mathcal{H} . Em particular

$$\begin{cases} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^0([0, +\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, +\infty); L^2(\Omega)) \\ (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^0([0, +\infty); H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, +\infty); L^2(\Omega)). \end{cases}$$

são sequências limitadas nos respectivos espaços (ver (5.60)).

Por outro lado, a imersão compacta de $H_0^2(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$ e de $H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ implica que as seguintes imersões:

$$\begin{cases} C^0([0, t^*]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, t^*]; L^2(\Omega)) \hookrightarrow C^0([0, t^*]; L^2(\Omega)) \\ C^0([0, t^*]; H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, t^*]; L^2(\Omega)) \hookrightarrow C^0([0, t^*]; H_0^1(\Omega)) \end{cases} \quad (5.139)$$

são compactas para cada $t^* > 0$.

Assim, como a expressão de f_{t^*} não dependem das componentes $(\varphi_1)_n$ e $(\varphi_2)_n$, as imersões compactas em (5.139) garante a existência de uma subsequência $(u_{n_k}, w_{n_k}, (u_t)_{n_k}, (w_t)_{n_k}, (\varphi_1)_{n_k}, (\varphi_2)_{n_k})$ de $(u_n, w_n, (u_t)_n, (w_t)_n, (\varphi_1)_n, (\varphi_2)_n)$ satisfazendo o limite (5.138). \square

Proposição 5.8

O semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ associado ao problema (5.99) é gradiente

Demonstração. Afirmamos que $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, definido por $\Phi(U_0) = E(t)$, onde $E(t)$ é a energia associada ao problema (5.99) dada em (5.52) é uma função de Lyapunov estrita para o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, e portanto $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é um semigrupo gradiente (ver Definição 3.27). De fato, da Proposição 5.5 segue que

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\gamma_1 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} (y^2 + \eta) |\varphi_1(x, t, y)|^2 dx dy - \gamma_2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} (y^2 + \zeta) |\varphi_2(x, t, y)|^2 dx dy. \quad (5.140)$$

Como $E(t) = \Phi(T(t)U_0)$, de (5.140), temos que aplicação $t \mapsto \Phi(T(t)U_0)$ é não crescente.

Agora, suponha que $\Phi(T(t)U_0) = \Phi(U_0)$ para todo $t \geq 0$. Então $E(t)$ é constante e de (5.140) segue que $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Assim, das Equações (5.12) e (5.14) segue que $u_t = 0$ e $w_t = 0$, respectivamente. Isto é, u e w são funções constantes com respeito a variável t . Nesse caso, temos:

$$T(t)U_0 = U_0 = (u_0, w_0, 0, 0, 0, 0); \forall t \geq 0,$$

o que completa a prova. \square

Teorema 5.9

Se $\eta, \zeta > 0$, então o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ associado ao problema (5.99) e definido em (5.102) possui um atrator global com dimensão fractal finita em \mathcal{H} e caracterizada pela variedade instável $\mathcal{M}^u(\mathcal{N})$ do conjunto de soluções estacionárias:

$$\mathcal{N} = \left\{ (u, w, 0, 0, 0, 0) \in \mathcal{H} \mid \begin{array}{l} -\Delta u + |u|^{\rho_1} - \tau(w - u) = f, \\ \Delta^2 w - m \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right) \Delta w + |w|^{\rho_2} w + \tau(w - u) = g. \end{array} \right\},$$

Demonstração. As Proposições 5.7 e 5.8 garantem que o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é gradiente assintoticamente suave. Assim, segundo o Teorema 3.28, para garantir a existência de atrator devemos mostrar que:

- (i) A função de Lyapunov $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada por cima sobre qualquer subconjunto limitado de \mathcal{H} .
- (ii) O conjunto $\Phi_R = \{U \in \mathcal{H}; \Phi(U) < R\}$ é limitado, qualquer que seja $R > 0$.
- (iii) O conjunto dos pontos fixos (ou estacionários) $\mathcal{N} = \{U \in \mathcal{H} / T(t)U = U; \forall t > 0\}$ é limitado.

Da Proposição 5.8, temos que $\Phi(U) = E(t)$, para todo dado inicial $U \in \mathcal{H}$. Seja $B \subset \mathcal{H}$ um conjunto limitado. Considere a solução branda do problema (5.99) dada por:

$$(u(t), w(t), u_t(t), w_t(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)) = T(t)U,$$

onde $U = (u_0, w_0, u_1, w_1, 0, 0) \in B$.

Seja $C_3 > 0$ a constante dada no estimativa (5.70). Então

$$\|T(t)U\|_{\mathcal{H}} = \|(u(t), w(t), u_t(t), w_t(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t))\|_{\mathcal{H}} \leq \sqrt{2C_3}; \forall t \geq 0,$$

Portanto $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada sobre o conjunto B_0 , onde B_0 é a bola fechada centrada na origem e com raio $\sqrt{2C_3}$ com respeito a norma do espaço \mathcal{H} , o que prova (i).

Para provar a afirmação (ii), comparamos a expressão (5.52) da energia $E(t)$ com a norma de \mathcal{H} dada em (5.23). Assim, dado $R > 0$ e $U \in \Phi_R = \{U \in \mathcal{H}; \Phi(U) < R\}$, temos:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{\rho_1 + 1} \|u(t)\|_{L^{\rho_1+1}(\Omega)}^{\rho_1+1} + \frac{1}{2} M (\|\nabla w(t)\|^2) + \frac{1}{\rho_2 + 2} \|w(t)\|_{L^{\rho_2+2}(\Omega)}^{\rho_2+2} \\ &\quad - \int_{\Omega} [f(x)u(x, t) + g(x)w(x, t)] dx, \end{aligned}$$

Assim, das desigualdades cauchy schwarz, Young e Poincaré, segue que

$$E(t) \geq \frac{1}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 - K_1 \varepsilon_1 \|\nabla u\|^2 - C(\varepsilon_1) \|f\|^2 - K_2 \varepsilon_2 \|\Delta w\|^2 - C(\varepsilon_2) \|g\|^2, \quad (5.141)$$

onde $K_1, K_2 > 0$ são constantes obtidas com a desigualdade de Poicaré, e, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ são constantes positivas a determinar.

Fazendo $\varepsilon_1 = 1/(4K_1)$ e $\varepsilon_2 = 1/(4K_2)$ em (5.141), obtemos:

$$E(t) \geq \frac{1}{4} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 - C(\|f\|^2 + \|g\|^2),$$

onde $C = \min\{C(\varepsilon_1), C(\varepsilon_2)\}$.

Portanto

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 4E(t) + 4C(\|f\|^2 + \|g\|^2) = 4\Phi(U(t)) + 4C(\|f\|^2 + \|g\|^2) < \tilde{C}(R + \|f\|^2 + \|g\|^2) < \infty,$$

onde $\tilde{C} = \max\{4, 4C\}$.

Finalmente, provaremos a afirmação (iii). Seja $U \in \mathcal{H}$, tal que

$$U(t) = T(t)U = (u, w, 0, 0, 0, 0); \quad \forall t \geq 0.$$

Em termos das coordenadas, temos:

$$-\Delta u + |u|^{\rho_1} - \tau(w - u) = f, \quad (5.142)$$

$$\Delta^2 w - m \left(\int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right) \Delta w + |w|^{\rho_2} w + \tau(w - u) = g, \quad (5.143)$$

$$(u)_{|\partial\Omega} = 0, \quad (w)_{|\partial\Omega} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5.144)$$

Multiplicando as equações (5.142) e (5.132) por u e w respectivamente, integrando em $x \in \Omega$ e aplicando as condições de fronteira (5.144), obtemos:

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|\nabla u\|^2 + \|\Delta w\|^2 + \tau \|w - u\|^2 \\ &\leq -\frac{1}{\rho_1 + 1} \|u\|_{L^{\rho_1+1}(\Omega)}^{\rho_1+1} - \frac{1}{\rho_2 + 2} \|w\|_{L^{\rho_2+2}(\Omega)}^{\rho_2+2} - m(\|\nabla w\|^2) \|\nabla w\|^2 + \langle f, u \rangle + \langle g, w \rangle \\ &\leq K_1 \varepsilon_3 \|\nabla u\|^2 + C(\varepsilon_3) \|f\|^2 + K_2 \varepsilon_4 \|\Delta w\|^2 + C(\varepsilon_4) \|g\|^2. \end{aligned}$$

Logo

$$\|U\|^2 \leq C_0 (\|f\|^2 + \|g\|^2),$$

onde $C_0 = 2 \max\{C(\varepsilon_3), C(\varepsilon_4)\}$, $\varepsilon_3 = 1/(2K_1)$ e $\varepsilon_4 = 1/(2K_2)$.

Portanto, do Teorema 3.28 o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ admite um atrator global dado por $\mathfrak{A} = \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$, onde $\mathcal{M}^u(\mathcal{N})$ é a variedade não estável proveniente de \mathcal{N} como o conjunto de todos os $U \in \mathcal{H}$ tal que existe uma trajetória completa $\gamma = \{U(s); s \in \mathbb{R}\}$ satisfazendo:

$$U(0) = U \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} \text{dist}_{\mathcal{H}}(U(s), \mathcal{N}) = 0.$$

Além disso, considere $U = (u, w, u_t, w_t, \varphi_1, \varphi_2)$ e $V = (v, z, v_t, z_t, \varphi_3, \varphi_4)$ soluções do problema (5.99), com $U(0) = U_0 \in \mathcal{H}$ e $V(0) = V_0 \in \mathcal{H}$. Da estimativa (5.135) segue que:

$$\begin{aligned} \|T(t)U_0 - T(t)V_0\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|U(t) - V(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \frac{2+2C_{14}}{C_{14}} e^{-\theta t} \|U_0 - V_0\|_{\mathcal{H}} + C_{15} \sup_{0 \leq \sigma \leq t^*} \int_{\sigma}^{\sigma+1} (\|\Phi\|^2 + \|\nabla \Psi\|^2) ds. \end{aligned}$$

Portanto o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é quase-estável (ver Definição 3.29). Com efeito, como as soluções U e V dependem continuamente dos dados iniciais U_0 e V_0 respectivamente, basta tomar $Y = [L^2(\Omega)]^2$, $X = H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$, $Z = [L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))]^2$, $H = \mathcal{H}$,

$$c(t) = C_{15}, \quad b(t) = \frac{2+2C_{14}}{C_{14}} e^{-\theta t} \quad \text{e} \quad \eta_X = \int_{\sigma}^{\sigma+1} \left(\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) ds.$$

Portanto, do Teorema 3.30 segue que $\mathfrak{A} = \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$ tem dimensão fractal finita. \square

Corolário 5.10 (Regularidade)

Se $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $w_0 \in H_0^2(\Omega)$ e $u_1, w_1 \in L^2(\Omega)$ a solução branda (u, w) do Problema (5.11)–(5.17), satisfaz:

$$\begin{cases} u \in C^0(0, +\infty; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, +\infty; L^2(\Omega)) \\ w \in C^0(0, +\infty; H_0^2(\Omega)) \cap C^1(0, +\infty; L^2(\Omega)) \\ u_t \in L^\infty(0, +\infty; H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, +\infty; L^2(\Omega)) \\ w_t \in L^\infty(0, +\infty; H_0^2(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0, +\infty; L^2(\Omega)) \end{cases}$$

Demonstração. Do Teorema 5.9 segue que o semigrupo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ admite atrator global \mathfrak{A} e é quase-estável sobre \mathfrak{A} . Assim, basta combinar o Teorema 3.31 com o Teorema 5.6. \square

Neste capítulo conseguimos estabelecer a existência de um atrator global \mathfrak{A} para o semigrupo não linear $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ associado ao sistema (5.3)–(5.6), sob a formulação equivalente (5.99), no caso em que os pesos fracionários η e ζ são estritamente positivos. As Proposições 5.7 e 5.8 asseguraram que o semigrupo é compactamente assintótico e gradiente, o que nos permitiu recorrer ao Teorema de Lasiecka para concluir que \mathfrak{A} existe, é invariante, e é precisamente a união das variedades instáveis do conjunto de pontos estacionários (isto é, $\mathfrak{A} = \mathcal{M}^u(\mathcal{N})$). A demonstração do teorema 5.9 completou essa linha de construção, com a verificação de que a função de Lyapunov é adequada, os pontos fixos são limitados e a estrutura de quase estabilidade garante a finitude da dimensão fractal. Por fim, no corolário, mostramos que as soluções que pertencem ao atrator ou convergem a ele apresentam regularidade adicional, estendendo a solução branda a uma “solução forte global” com estimativas nas derivadas.

Contudo, mesmo tendo alcançado esses resultados centrais, permanecem algumas questões abertas e aspectos mais refinados do comportamento assintótico que não abordamos completamente no presente capítulo, como por exemplo a questão da existência de atrator global para o caso em

que $\eta = 0$ ou $\zeta = 0$. A seguir discuto os principais aspectos remanescentes e possíveis direções para investigações futuras.

Um ponto delicado e frequentemente desejável em análise de atratores é a obtenção de taxas de atração explícitas, isto é, estimativas quantitativas de como a distância de uma órbita a \mathfrak{A} decai com o tempo. No contexto clássico de problemas lineares ou fortemente dissipativos, é comum obter decaimento exponencial, o que permite a definição de um atrator exponencial: um conjunto que atrai todas as órbitas em tempo assintótico com taxa exponencial e tem dimensão fractal finita, possivelmente maior que a do atrator global, mas que fornece controle mais forte da convergência.

No presente modelo, porém, não exploramos explicitamente se o semigrupo admite um atrator exponencial. Os argumentos utilizados para provar a existência do atrator global e a quase estabilidade baseiam-se em estimativas que garantem decaimento “mais lento” (por exemplo, integrando em intervalos de unidade e usando a função $F(t)$, conforme (5.135)). Assim, não temos uma estimativa exponencial clara da distância entre $T(t)U_0$ e \mathfrak{A} . Em geral, em sistemas hiperbolo-parabólicos ou semilineares com memória ou não linearidades fortes, não se espera decaimento exponencial.

Portanto, em trabalhos futuros, vale explorar se é possível construir um atrator exponencial para este sistema, encontrando decomposições “contrativa + compacta” que permitam estimativas exponenciais, seguindo métodos clássicos. Se isso falhar, tentar formular e provar a existência um atrator com taxa polinomial de atração em algum sentido.

Capítulo 6

Sobre um modelo não autônomo de equação de onda com condição de fronteira acústica e sobre o efeito de amortecimento interno não linear e amortecimento do tipo derivada fracionária na fronteira.

Além dos modelos clássicos de vibrações estruturais, um dos temas que despertou grande interesse na teoria de equações de evolução foi a introdução das chamadas condições de contorno acústicas. Esse conceito foi inicialmente proposto por Beale e Rosencrans (BEALE; ROSENCRANS, 1974), no estudo da equação da onda sujeita a condições de contorno derivadas de modelos de propagação acústica em meios com fronteiras reativas localmente.

O ponto de partida consiste em considerar um domínio preenchido por um fluido em repouso, sujeito a pequenas perturbações irrotacionais. A fronteira do domínio, em vez de ser tratada como rígida ou perfeitamente absorvente, é modelada como uma coleção de osciladores harmônicos independentes, que reagem ao excesso de pressão como molas amortecidas. Essa formulação conduz a um sistema acoplado entre a equação da onda no interior do domínio e uma equação diferencial ordinária que descreve o deslocamento normal da superfície.

Na modelagem de Beale e Rosencrans (BEALE; ROSENCRANS, 1974), a função $u = u(x, t)$ representa o deslocamento do fluido no interior do domínio, satisfazendo a equação da onda $u_{tt} - \Delta u = 0$. Na fronteira, introduziu-se uma função $\delta(\xi, t)$ para descrever a oscilação vibratória independente. Essa oscilação satisfaz a equação:

$$m\delta_{tt} + d\delta_t + k\delta = -\rho u_t,$$

onde m é a massa por unidade de área da fronteira, d a resistividade do material, k a constante da

mola e ρ a densidade não perturbada do gás.

Além disso, a continuidade da velocidade normal entre o gás e a fronteira impõe a condição:

$$\delta_t(\xi, t) = -\frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi - \nu \delta(\xi, t), t),$$

onde $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ denota a derivada normal exterior de u .

A análise apresentada em (BEALE; ROSENCRANS, 1974) mostrou que o operador associado ao sistema é maximal dissipativo, garantindo que o problema de Cauchy é bem posto segundo o Teorema de Lumer-Phillips. Posteriormente, Beale (BEALE, 1976) aprofundou a investigação espectral do gerador do semigrupo associado a essas condições de contorno. Diferentemente dos problemas clássicos de contorno da equação da onda, cujo resolvente é compacto e o espectro consiste apenas em autovalores discretos, verificou-se que, neste caso, o espectro contém sempre parte essencial. Esse fenômeno está diretamente ligado à dependência explícita da condição de contorno em relação ao parâmetro espectral. Em particular, para coeficientes constantes, demonstrou-se a existência de sequências de autovalores que se acumulam no espectro essencial, revelando uma estrutura espectral significativamente mais complexa.

A partir desses trabalhos pioneiros, Frota e Goldstein (FROTA; GOLDSTEIN, 2000) estenderam a análise para equações de onda não lineares com condições de contorno acústicas. Eles provaram a existência e unicidade de soluções globais para uma ampla classe de problemas, consolidando a relevância do modelo e ampliando sua aplicação para equações não lineares de Kirchhoff e Carrier. Por meio de uma formulação em termos de semigrupos, mostraram que o sistema é regido por um semigrupo de contrações em um espaço de Hilbert de quatro componentes, incorporando tanto as variáveis internas quanto o deslocamento da fronteira.

Mais precisamente, Frota e Goldstein (FROTA; GOLDSTEIN, 2000) consideraram um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto, limitado e com fronteira regular, dividida em $\Gamma := \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, e estudaram o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u_{tt} - M \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right) \Delta u + C |u_t|^\gamma u_t = 0; & \text{sobre } \Omega \times (0, T), \\ f \delta_{tt} + g \delta_t + h \delta = -\rho u_t; & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, T), \\ u = 0; & \text{sobre } \Gamma_0 \times (0, T), \\ \delta_t = \frac{\partial u}{\partial \nu}; & \text{sobre } \Gamma_1 \times (\tau, +\infty), \\ u(x, \tau) = u_\tau^0(x), \quad u_t(x, \tau) = u_\tau^1(x); & \text{sobre } \Omega, \end{cases}$$

obtendo existência e unicidade de solução forte.

No que se refere ao comportamento assintótico, Frigeri (FRIEGERI, 2010) investigou equações de onda fracamente amortecidas com condições de contorno acústicas, estabelecendo a existência de conjuntos absorventes e de um atrator global no espaço de fases, com regularidade adicional e, notavelmente, a existência de atratores exponenciais. O problema estudado por Frigeri (FRIEGERI,

2010) foi

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u + f(u) + cu_t = 0; \text{ sobre } \Omega \times (0, +\infty), \\ \delta_{tt} + \delta + d\delta_t = -u_t; \text{ sobre } \in \Gamma \times (0, +\infty), \\ \delta_t = \frac{\partial u}{\partial v}; \text{ sobre } \Gamma \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x); x \in \Omega, \\ \delta(\xi, 0) = \delta_0(\xi), \delta_t(\xi, 0) = \delta_1(\xi); \xi \in \Gamma, \end{cases}$$

com $N = 3$.

Ma e Souza (MA; SOUZA, 2017) analisaram a versão não-autônoma do problema, na qual forças externas dependem explicitamente do tempo:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u + f(u) + cu_t = h; \text{ sobre } \Omega \times (0, +\infty), \\ \delta_{tt} + \delta + d\delta_t = -u_t; \text{ sobre } \in \Gamma \times (0, +\infty), \\ \delta_t = \frac{\partial u}{\partial v}; \text{ sobre } \Gamma \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x); x \in \Omega, \\ \delta(\xi, 0) = \delta_0(\xi), \delta_t(\xi, 0) = \delta_1(\xi); \xi \in \Gamma. \end{cases} \quad (6.1)$$

demonstrando a existência de um processo de evolução bem posto e de um atrator pullback minimal no contexto de bacias de atração generalizadas. Essa abordagem permite tratar não linearidades críticas e analisar a semicontinuidade superior de atratores quando a perturbação não-autônoma tende a zero, constituindo uma extensão natural das análises de Frigeri (FRIEGERI, 2010).

Por outro lado, Tomás Caraballo e colaboradores (CARABALL et al., 2010) estudaram uma equação de onda não linear e não-autônoma, com dependência temporal via o coeficiente do amortecimento friccional:

$$u_{tt} - \Delta u + f(u) + \beta(t)u_t = 0,$$

onde $\beta : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ é uma função adequada. Mais recentemente, Miranda, Raposo e Freitas (MIRANDA; RAPOSO; FREITAS, 2025) investigaram a existência de atrator global e exponencial para um modelo não linear autônomo de ponte suspensa, incluindo amortecimentos do tipo não linear.

Em síntese, as condições de contorno acústicas introduzidas em (BEALE; ROSENCRANS, 1974; BEALE, 1976) e posteriormente desenvolvidas em (FROTA; GOLDSTEIN, 2000; FRIEGERI, 2010; MA; SOUZA, 2017) constituem um modelo matemático rico e desafiador, com aplicações tanto em acústica teórica quanto na análise qualitativa de equações de evolução não lineares. Inspirado pelo modelo não-autônomo (6.1) estudado em (MA; SOUZA, 2017), pela dependência temporal introduzida em (CARABALL et al., 2010) e pelo amortecimento friccional não linear de (MIRANDA; RAPOSO; FREITAS, 2025), o presente capítulo investiga a existência de atrator pullback para uma equação de onda com fronteira acústica, sujeita a um amortecimento friccional interno não linear e um amortecimento

fracionário na fronteira, ambos com coeficientes dependentes do tempo:

$$u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) + u(x, t) + f(u(x, t)) + c(t)g(u_t(x, t)) = h(x, t); \quad (x, t) \in \Omega \times (\tau, +\infty), \quad (6.2)$$

$$\delta_{tt}(\xi, t) + \delta(\xi, t) + d(t)\delta_t^{\alpha, \eta}\delta(\xi, t) = -(u_t)_{|\Gamma}(\xi, t); \quad (\xi, t) \in \Gamma \times (\tau, +\infty), \quad (6.3)$$

$$\delta_t(\xi, t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi, t); \quad (\xi, t) \in \Gamma \times (\tau, +\infty), \quad (6.4)$$

$$u(x, \tau) = u_\tau^0(x), \quad u_t(x, \tau) = u_\tau^1(x); \quad x \in \Omega, \quad (6.5)$$

$$\delta(\xi, \tau) = \delta_\tau^0(\xi), \quad \delta_t(\xi, \tau) = \delta_\tau^1(\xi); \quad \xi \in \Gamma, \quad (6.6)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto limitado bem regular com fronteira $\Gamma := \partial\Omega$, $t \geq \tau$ é a variável de tempo (com $\tau \in \mathbb{R}$ fixo), $x \in \Omega$ e $\xi \in \Gamma$ representam as variáveis espaciais do interior e da fronteira de Ω respectivamente, ν é o vetor normal unitário em Γ , exterior à Ω , e $\delta_t^{\alpha, \eta}$ é o operador derivada fracionária de Caputo exponencialmente modificada de ordem $0 < \alpha < 1$ e peso $\eta \geq 0$.

Assumiremos as seguintes hipóteses técnicas:

- (i) $c, d : [\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 , tais que, existem constantes $c_0, c_1, d_0, d_1 > 0$ satisfazendo:

$$c(t) \geq c_0, \quad -c_1 \leq c'(t) \leq 0, \quad d(t) \geq d_0 \quad \text{e} \quad -d_1 \leq d'(t) \leq 0; \quad \forall t \geq \tau. \quad (6.7)$$

- (ii) $f \in C^1(\mathbb{R})$, e existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$|f'(u)| \leq C(1 + |u|^{\rho-1}); \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad (6.8)$$

onde $\rho = 3$, se $N \in \{1, 2\}$ e $1 \leq \rho \leq \frac{N}{N-2}$, se $N \geq 3$.

- (iii) Existem constantes $m_f > 0$ e $0 < \beta < 1$ tais que:

$$F(u) \geq -\frac{\beta}{2}u^2 - m_f \quad \text{e} \quad f(u)u - F(u) \geq -\frac{\beta}{2}u^2 - m_f; \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad (6.9)$$

onde $F(u) = \int_\tau^u f(s) \, ds$.

- (iv) $g \in C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo $g(0) = 0$, e existe constante $m > 0$ tal que

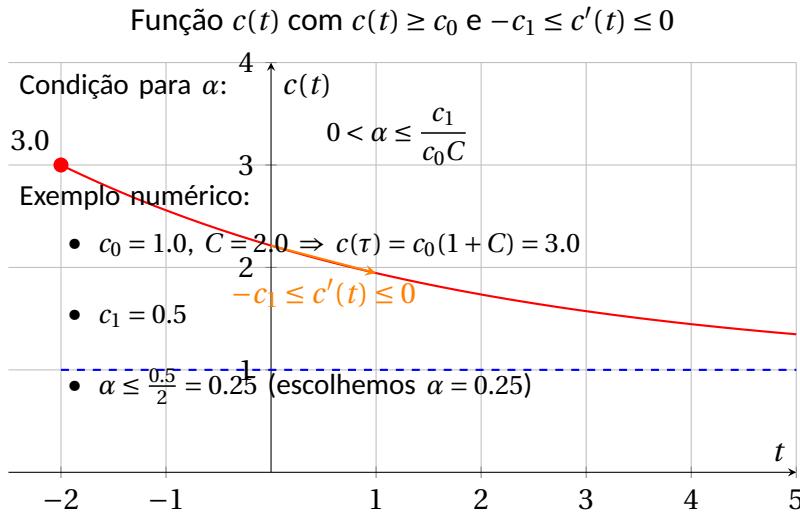
$$m \leq g'(\nu); \quad \forall \nu \in \mathbb{R} \quad (6.10)$$

- (v) $h \in L_{loc}^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ e existe $\sigma_0 > 0$ (à ser fixado) de modo que

$$\int_{-\infty}^0 e^{\sigma_0 s} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds < \infty,$$

e consequentemente:

$$\int_{-\infty}^t e^{-\sigma_0(t-s)} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds < \infty; \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (6.11)$$



$c(t) = c_0 + (c_0 C) e^{-\alpha(t-\tau)}$	$c_0 = 1.0$
$c(\tau) - c_0 = c_0 C$	$C = 2.0$
	$\alpha = 0.25$

Aplicando a Proposição 4.4, podemos reformular o problema (6.2)–(6.6) no seguinte sistema ampliado equivalente:

$$u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) + u(x, t) + f(u(x, t)) + c(t)g(u_t(x, t)) = h(x, t); \quad x \in \Omega \text{ e } t > \tau, \quad (6.12)$$

$$\delta_{tt}(\xi, t) + \delta(\xi, t) + \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi(\xi, t, y) dy = -(u_t)_{|\Gamma}(\xi, t); \quad \xi \in \Gamma, \text{ e } t > \tau, \quad (6.13)$$

$$\varphi_t(\xi, t, y) + (y^2 + \eta) \varphi(\xi, t, y) - p(y) \delta_t(\xi, t) = 0; \quad \xi \in \Gamma, t > \tau \text{ e } y \in \mathbb{R}, \quad (6.14)$$

$$\delta_t(\xi, t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi, t); \quad \xi \in \Gamma \text{ e } t > \tau, \quad (6.15)$$

$$u(x, \tau) = u_{\tau}^0(x) \text{ e } u_t(x, \tau) = u_{\tau}^1(x); \quad x \in \Omega \text{ e } y \in \mathbb{R}, \quad (6.16)$$

$$\delta(\xi, \tau) = \delta_{\tau}^0(\xi), \quad \delta_t(\xi, \tau) = \delta_{\tau}^1(\xi) \text{ e } \varphi(\xi, \tau, y) = 0; \quad \xi \in \Gamma \text{ e } y \in \mathbb{R}, \quad (6.17)$$

onde $p(y) = |y|^{\frac{2\alpha-1}{2}}$ e $\gamma(t) = \frac{d(t)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$.

Observe que da hipótese (6.7), segue que $\gamma: [\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que:

$$\gamma(t) \geq \gamma_0 \text{ e } -\gamma_1 \leq \gamma'(t) \leq 0; \quad \forall t \geq \tau, \quad (6.18)$$

onde

$$\gamma_j = \frac{d_j}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \quad (j = 0, 1).$$

Este capítulo está dividido em duas seções. Na primeira, utilizamos a teoria de semigrupos de operadores lineares limitados, juntamente com a teoria dos sistemas CD de Kato, com o intuito de demonstrar a existência e unicidade de solução forte local para o problema (6.2)–(6.6). Em seguida,

por meio de estimativas de energia, mostramos que essa solução é, na realidade, globalmente definida. Além disso, a partir de estimativas envolvendo a norma das derivadas da solução, obtemos resultados de regularidade que reforçam a robustez da análise.

Na segunda seção, com base na teoria de Processo de Evolução desenvolvida na segunda seção do Capítulo 3, mostramos a existência de um atrator pullback em um universo de atração generalizado \mathcal{D} . Para tal, demonstramos que o Processo associado ao problema admite uma família de conjuntos \mathcal{D} -pullback absorventes e é \mathcal{D} assintoticamente compacto. Isso foi feito com hipóteses relaxadas para a não linearidade f , quando a dimensão do domínio $N \leq 3$, e condições mais restritas para $N > 3$.

6.1 Boa-Colocação

Nesta seção, reescreveremos o problema (6.12)–(6.17) na forma de um problema abstrato de Cauchy não linear e não autônomo. Mostraremos que a coleção (dependente do tempo) de operadores que descrevem a parte linear possui domínio constante D , e que cada um deles é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações. Além disso, a condição de contração dessa família de semigrupos é uniforme no tempo, ou seja, as constantes que controlam o crescimento da norma são independentes de t .

Em seguida, verificaremos que a aplicação $t \mapsto \mathcal{A}(t)$, que associa o instante t ao operador linear correspondente, é Lipschitziana de $[\tau, +\infty)$ em $\mathcal{L}(\mathcal{H}, D)$. Isso nos permitirá concluir que a tripla $(\{\mathcal{A}(t)\}_{t \geq \tau}, \mathcal{H}, D)$ constitui um sistema CD de Kato, o qual garante a existência de um processo de evolução $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ associado a parte linear não homogênea do problema. Assim, obtemos a existência de uma única solução branda para esse problema, no sentido da teoria de Kato.

Posteriormente, provaremos que o operador que descreve a parte não linear é Lipschitziano na variável temporal $t \geq \tau$, uniformemente em subconjuntos limitados de \mathcal{H} , e localmente Lipschitz na variável $U \in \mathcal{H}$. Além disso, como a força externa satisfaz $h \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$, poderemos aplicar os resultados de existência e unicidade apresentados na Seção 2. Dessa forma, concluiremos que o problema (6.12)–(6.17), e portanto também o problema (6.2)–(6.6), admite solução local.

Na sequência, introduziremos a energia total do sistema e, a partir de estimativas apropriadas, demonstraremos que a norma da solução permanece limitada em função do tempo t . Esse resultado implica que a solução pode ser estendida para todo $t \geq \tau$, garantindo a existência de solução global. Finalmente, utilizando estimativas adicionais sobre a norma da derivada temporal da solução, obteremos resultados de regularidade, concluindo que a solução global encontrada é, de fato, uma solução forte.

6.1.1 Formulação do Processo Evolutivo Linear

Queremos agora reescrever o problema (6.12)–(6.17) como um problema abstrato de Cauchy. Para isso, introduzimos a função vetorial $U = (u, \delta, v, z, \varphi)$, em que $u_t = v$ e $\delta_t = \frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{\Gamma} = z$.

Assim, temos:

$$\begin{cases} U'(t) - \mathcal{A}(t)U(t) + \mathcal{F}(U(t), t) = \mathcal{G}(t); \quad t > \tau, \\ U(\tau) = U_{\tau}, \end{cases} \quad (6.19)$$

onde $U_{\tau} = (u_{\tau}^0, \delta_{\tau}^0, u_{\tau}^1, \delta_{\tau}^1, 0)$; para cada $t \geq \tau$,

$\mathcal{A}(t) : D(\mathcal{A}(t)) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador linear definido por:

$$\mathcal{A}(t)U = \begin{pmatrix} v \\ z \\ \Delta u - u \\ -\delta - \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} p(y)\varphi(y)dy - v|_{\Gamma} \\ -(y^2 + \eta)\varphi(y) + p(y)z \end{pmatrix}; \quad (6.20)$$

$\mathcal{F} : [\tau, +\infty) \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e $\mathcal{G} : [\tau, +\infty) \rightarrow \mathcal{H}$ são aplicações definidas por:

$$\mathcal{F}(t, U) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(u) + c(t)g(v) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{G}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

Observe que para o problema de Cauchy (6.19) ser equivalente ao nosso problema ampliado (6.12)–(6.17), basta escolher um espaço de fase \mathcal{H} conveniente e um domínio $D(\mathcal{A}(t))$ tempo-independente. Para tal, considere o seguinte espaço de fase: $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$, onde

$$\mathcal{H} = H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma) \times L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))$$

e

$$\langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle u, \tilde{u} \rangle_{H^1(\Omega)} + \langle \delta, \tilde{\delta} \rangle_{L^2(\Gamma)} + \langle v, \tilde{v} \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle z, \tilde{z} \rangle_{L^2(\Gamma)} + \langle \varphi, \tilde{\varphi} \rangle_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}.$$

Observe que para $\mathcal{A}(t)U \in \mathcal{H}$, deve-se ter note que devemos ter $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$, $\delta \in L^2(\Gamma)$ e $z \in L^2(\Gamma)$. Do Teorema de traço (Teorema 1.63) em $H^2(\Omega)$ e em $H^1(\Omega)$, tem-se $u|_{\Gamma} \in H^{3/2}(\Gamma)$, $\frac{\partial u}{\partial v} \in H^{1/2}(\Gamma)$ e $v|_{\Gamma} = (u_t)|_{\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma)$ respectivamente. Contudo, como $z = \delta_t = \frac{\partial u}{\partial v}$, segue que

$z \in H^{1/2}(\Gamma)$. Assim, considere o domínio constante $D(\mathcal{A}(t)) = D$, para todo $t \geq \tau$, onde

$$D := \left\{ (u, \delta, v, z, \varphi) \left| \begin{array}{l} u \in H^2(\Omega), \\ \delta \in L^2(\Gamma), \\ v \in H^1(\Omega), \\ z \in H^{1/2}(\Gamma); z = \frac{\partial u}{\partial v}, \\ \varphi \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma)); |y|\varphi, -(y^2 + \eta)\varphi + p(y)z \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma)). \end{array} \right. \right\}. \quad (6.22)$$

Observe que D é denso em \mathcal{H} . Agora, defina:

$$\langle U, \tilde{U} \rangle_t = \langle u, \tilde{u} \rangle_{H^1(\Omega)} + \langle \delta, \tilde{\delta} \rangle_{L^2(\Gamma)} + \langle v, \tilde{v} \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle z, \tilde{z} \rangle_{L^2(\Gamma)} + \gamma(t) \langle \varphi, \tilde{\varphi} \rangle_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}$$

para $U = (u, \delta, v, z, \varphi)$ e $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{\delta}, \tilde{v}, \tilde{z}, \tilde{\varphi})$ em \mathcal{H} .

Note que, para cada $t \geq \tau$, $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_t)$ é um espaço de Hilbert (munido da norma $\|U\|_t^2 = \langle U, U \rangle_t$) topologicamente equivalente ao espaço $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$.

Observação 6.1

Observe que $\|\cdot\|_t$ e $\|\cdot\|_s$ são normas equivalentes em \mathcal{H} , quaisquer que sejam $t, s \geq \tau$.

6.1.2 Existência de Solução Local

Proposição 6.2

Para cada $t \geq \tau$, o operador linear $\mathcal{A}(t) : D \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definido em (6.20) é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo (de operadores lineares limitados) de contrações $\{S_t(s)\}_{s \geq \tau}$ sobre \mathcal{H} . Além disso, existem constantes $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ independentes de t , tais que:

$$\|S_t(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega s}; \forall t, s \geq \tau. \quad (6.23)$$

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que para cada $t \geq \tau$, o operador linear $\mathcal{A}(t)$ é dissipativo e maximal. Seja $U = (u, \delta, v, z, \varphi) \in D$. Então para cada $t \geq \tau$, temos:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_t &= \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega} v \bar{u} dx + \int_{\Gamma} z \bar{\delta} d\Gamma + \int_{\Omega} \Delta u \bar{v} dx - \int_{\Omega} u \bar{v} dx + dx - \int_{\Gamma} \delta \cdot \bar{z} d\Gamma \\ &\quad - \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \varphi(y) \bar{z} d\Gamma dy - \int_{\Gamma} v|_{\Gamma} \bar{z} d\Gamma - \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} (y^2 + \eta) |\varphi(y)|^2 d\Gamma dy \\ &\quad + \gamma(t) \int_{\Omega} p(y) \overline{\varphi(y)} z d\Gamma dy. \end{aligned}$$

Como $U \in D$, segue que $v \in H^1(\Omega)$, $z \in H^{1/2}(\Gamma)$ e $z = \frac{\partial u}{\partial v}$. Assim, utilizando a Fórmula de Green, temos:

$$\int_{\Omega} \Delta u \bar{v} dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} dx + \int_{\Gamma} \bar{v}|_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial v} d\Gamma = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} dx + \int_{\Gamma} \bar{v}|_{\Gamma} z d\Gamma.$$

Simplificando os termos semelhantes, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_t &= \int_{\Omega} [\nabla v \cdot \bar{\nabla u} - \bar{\nabla v} \cdot \bar{\nabla u}] dx + \int_{\Omega} [v \cdot \bar{u} - \bar{v} \cdot \bar{u}] dx + \int_{\Gamma} [z \bar{v}|_{\Gamma} - \bar{z} \bar{v}|_{\Gamma}] d\Gamma \\ &\quad \int_{\Gamma} [z \cdot \bar{\delta} - \bar{z} \cdot \bar{\delta}] d\Gamma + \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) [z \bar{\varphi}(y) - \bar{z} \bar{\varphi}(y)] d\Gamma dy \\ &\quad - \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} (y^2 + \eta) |\varphi(y)|^2 d\Gamma dy. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_t &= 2i \int_{\Omega} \operatorname{Im}[\nabla v \bar{\nabla u}] dx + 2i \int_{\Omega} \operatorname{Im}[v \bar{u}] dx + 2i \int_{\Omega} \operatorname{Im}[(z \bar{v})|_{\Gamma}] d\Gamma + 2i \int_{\Gamma} \operatorname{Im}[z \bar{\delta}] d\Gamma \\ &\quad + 2i \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \operatorname{Im}[z \bar{\varphi}(y)] d\Gamma dy - \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} (y^2 + \eta) |\varphi(y)|^2 d\Gamma dy. \end{aligned}$$

Finalmente, tomando a parte real, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle \mathcal{A}U, U \rangle_t &= -\gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} (y^2 + \eta) |\varphi(y)|^2 d\Gamma dy \\ &\leq -\gamma_0 \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} (y^2 + \eta) |\varphi(y)|^2 d\Gamma dy \leq 0, \end{aligned} \tag{6.24}$$

onde $\gamma_0 = \frac{d_0}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$ (ver hipóteses em (6.18)).

Portanto, o operador $\mathcal{A}(t)$ é dissipativo para todo $t \geq \tau$.

Mostraremos agora que para cada $t \geq \tau$, $\mathcal{A}(t)$ é um operador maximal. Para tal, iremos provar que, dado $W \in \mathcal{H}$, existe um vetor $U \in D(\mathcal{A}(0))$ tal que $(I - \mathcal{A}(t))U = W$. Isto equivale a resolução do seguinte sistema de equações:

$$u - v = f_1, \tag{6.25}$$

$$\delta - z = f_2, \tag{6.26}$$

$$v - \Delta u + u = g_1, \tag{6.27}$$

$$z + \delta + \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi(y) dy + v|_{\Gamma} = g_2, \tag{6.28}$$

$$\varphi(y) + (y^2 + \eta) \varphi(y) - p(y)z = h(y), \tag{6.29}$$

onde $W = (f_1, f_2, g_1, g_2, h)$ e $U = (u, \delta, v, z, \varphi)$.

De (6.25) e (6.26), segue que:

$$v = u - f_1 \quad \text{e} \quad z = \delta - f_2. \tag{6.30}$$

Substituindo a segunda equação em (6.30) na equação (6.29), obtemos:

$$\varphi(y) = \frac{h(y)}{y^2 + \eta + 1} - \frac{p(y)f_2}{y^2 + \eta + 1} + \frac{p(y)\delta}{y^2 + \eta + 1}. \tag{6.31}$$

Aplicando o Lema 4.5 à expressão (6.31), obtemos:

$$\gamma(t) \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi(y) dy = \gamma(t) [H(\alpha, \eta, 1) + C(\alpha, \eta, 1)(\delta - f_2)], \tag{6.32}$$

onde $H(\alpha, \eta, 1) = \int_{\Gamma} |H(\xi, \alpha, \eta, 1)|^2 d\Gamma$.

Aplicando a primeira equação de (6.30) na Equação (6.27), temos:

$$2u - \Delta u = f_1 + g_1, \quad (6.33)$$

e substituindo a segunda equação de (6.30) e a expressão obtida em (6.32) na Equação (6.28), obtemos:

$$[2 + \gamma(t)C(\alpha, \eta, 1)]\delta + u|_{\Gamma} = [1 + \gamma(t)C(\alpha, \eta, 1)]f_2 + g_2 + (f_1)|_{\Gamma} - \gamma(t)H(\alpha, \eta, 1). \quad (6.34)$$

Multiplicando a equação (6.33) por $\bar{u} \in H^1(\Omega)$, integrando sobre x em Ω , e, em seguida, aplicando a Fórmula de Green e a segunda equação em (6.29), obtém-se:

$$2 \int_{\Omega} u \bar{u} dx + \int_{\Omega} \nabla u \bar{\nabla} \bar{u} dx - \int_{\Gamma} \delta \bar{u}|_{\Gamma} d\Gamma = \int_{\Omega} F_1(t) \bar{u} dx - \int_{\Gamma} f_2 \bar{u}|_{\Gamma} d\Gamma, \quad (6.35)$$

onde $F_1(t) = f_1 + g_1$.

Por outro lado, multiplicando a equação (6.34) por $\bar{\delta} \in L^2(\Gamma)$, integrando sobre ξ em Γ , obtemos:

$$C(t) \int_{\Gamma} \delta \bar{\delta} d\Gamma + \int_{\Gamma} u|_{\Gamma} \bar{\delta} d\Gamma = \int_{\Gamma} F_2(t) \bar{\delta} d\Gamma, \quad (6.36)$$

onde $C(t) = 2 + \gamma(t)C(\alpha, \eta, 1)$ e $F_2(t) = [1 + \gamma(t)C(\alpha, \eta, 1)]f_2 + g_2 + (f_1)|_{\Gamma} - \gamma(t)H(\alpha, \eta, 1)$.

Agora, observe que o sistema (6.35)–(6.36) é equivalente ao problema variacional de encontrar um vetor $(u, \delta) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma)$ tal que

$$\mathcal{B}((u, \delta), (\tilde{u}, \tilde{\delta})) = \mathcal{L}(\tilde{u}, \tilde{\delta}); \quad \forall (\tilde{u}, \tilde{\delta}) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma), \quad (6.37)$$

onde $\mathcal{B} : [H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma)] \times [H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{C}$ é a forma sesquilinear definida por:

$$\mathcal{B}((u, \delta), (\tilde{u}, \tilde{\delta})) = 2 \int_{\Omega} u \bar{\tilde{u}} dx + C(t) \int_{\Gamma} \delta \bar{\tilde{\delta}} d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla u \bar{\nabla} \tilde{u} dx + 2i \int_{\Gamma} \text{Im}[u|_{\Gamma} \bar{\tilde{\delta}}] d\Gamma$$

e $\mathcal{L} : H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}$ é a forma antilinear definida por:

$$\mathcal{L}(\tilde{u}, \tilde{w}) = \int_{\Omega} F_1(t) \bar{\tilde{u}} dx + \int_{\Gamma} F_2(t) \bar{\tilde{\delta}} d\Gamma - \int_{\Gamma} f_2 \bar{\tilde{u}}|_{\Gamma} d\Gamma.$$

Como feito nos capítulos anteriores, nosso objetivo é aplicar o Teorema de Lax-Milgram. Para testar a continuidade da forma sesquilinear \mathcal{B} , analisamos termo a termo. Sejam $(u, \delta), (\tilde{u}, \tilde{\delta}) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma)$. Note que:

$$\left| 2 \int_{\Omega} u \bar{\tilde{u}} dx \right| \leq 2 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq 2 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega)},$$

$$\left| C(t) \int_{\Gamma} \delta \bar{\tilde{\delta}} d\Gamma \right| \leq C(t) \|\delta\|_{L^2(\Gamma)} \|\tilde{\delta}\|_{L^2(\Gamma)}$$

e

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \overline{\nabla \tilde{u}} \, dx \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Além disso, observe que da continuidade da aplicação traço (ver Teorema 1.63), existe constante $C_0 > 0$ tal que $\|u|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_0 \|u\|_{H^1(\Omega)}$. Assim, da Desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que:

$$\left| 2i \int_{\Gamma} \text{Im}[u|_{\Gamma} \bar{\delta}] \, d\Gamma \right| \leq 2 \int_{\Gamma} |u|_{\Gamma} |\bar{\delta}| \, d\Gamma \leq 2 \|u|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} \|\bar{\delta}\|_{L^2(\Gamma)} \leq 2C_0 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\bar{\delta}\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Somando as estimativas obtidas acima, temos:

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}((u, \delta), (\tilde{u}, \tilde{\delta}))| &\leq 3 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega)} + C(t) \|\delta\|_{L^2(\Gamma)} \|\tilde{\delta}\|_{L^2(\Gamma)} + 2C_0 \|u\|_{H^1(\Omega)} \|\tilde{\delta}\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \tilde{C}(t) \|(u, \delta)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma)}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{C}(t) = \max\{3, C(t), 2C_0\}$ (t fixo).

Agora mostraremos que \mathcal{B} é coerciva. Seja $(u, \delta) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Gamma)$. Observe que:

$$\text{Re} \left(2i \int_{\Gamma} \text{Im}[u|_{\Gamma} \delta] \, d\Gamma \right) = 0.$$

Então

$$\begin{aligned} \text{Re} \mathcal{B}((u, \delta), (u, \delta)) &= 2 \|u\|^2 + C(t) \|\delta\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \tilde{C} \left(\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\delta\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) \\ &= \tilde{C} \|(u, \delta)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma)}^2, \end{aligned}$$

onde $\tilde{C} = \min\{1, C\}$ e $C = 2 + \gamma_0 C(\alpha, \eta, 1)$.

Por fim, dado $(\tilde{u}, \tilde{w}) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$, temos:

$$\left| F_1(t) \int_{\Omega} \bar{\tilde{u}} \, dx \right| \leq \|F_1(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{u}\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\left| \int_{\Gamma} F_2(t) \bar{\tilde{\delta}} \, d\Gamma \right| \leq \|F_2(t)\|_{L^2(\Gamma)} \|\tilde{\delta}\|_{L^2(\Gamma)}.$$

e

$$\left| \int_{\Gamma} f_2 \bar{\tilde{u}}|_{\Gamma} \, d\Gamma \right| \leq \|f_2\|_{L^2(\Gamma)} \|\tilde{u}|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_0 \|f_2\|_{L^2(\Gamma)} \|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega)},$$

onde $C_0 > 0$ é a constante da continuidade da aplicação traço em $H^1(\Omega)$.

Somando as estimativas obtidas acima, temos:

$$|\mathcal{L}(\tilde{u}, \tilde{\delta})| \leq (\|F_1(t)\|_{L^2(\Omega)} + C_0 \|f_2\|_{L^2(\Gamma)}) \|\tilde{u}\|_{H^1(\Omega)} + \|F_2(t)\|_{L^2(\Gamma)} \|\tilde{\delta}\|_{L^2(\Gamma)} \leq \widetilde{K}(t) \|\tilde{u}, \tilde{\delta}\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma)},$$

onde $\widetilde{K}(t) = \max\{\|F_1(t)\|_{L^2(\Omega)} + C_0 \|f_2\|_{L^2(\Gamma)}, \|F_2(t)\|_{L^2(\Gamma)}\}$.

Portanto, do Teorema de Lax-Milgram, existe uma única solução $(u, \delta) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Gamma)$ para o problema variacional (6.37).

Como $f_1 \in H^1(\Omega)$ e $f_2 \in L^2(\Gamma)$, definindo v e z como dados em (6.30), tem-se que $v \in H^1(\Omega)$ e $z \in L^2(\Gamma)$. Além disso, como $h \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))$, definindo $\varphi(y)$ pela expressão dada em (6.31), é evidente que $|y|\varphi \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))$ e $-(y^2 + \eta)\varphi + p(y)z \in L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$.

Agora, fazendo $\tilde{\delta} \equiv 0$ e $\tilde{u}|_{\Gamma} \equiv 0$ no problema variacional (6.37) e utilizando a fórmula de Green, obtemos:

$$2 \int_{\Omega} u \bar{\tilde{u}} dx - \int_{\Omega} \Delta u \cdot \bar{\tilde{u}} dx = \int_{\Omega} F_1(t) \bar{\tilde{u}} dx; \forall \tilde{u} \in H^1(\Omega),$$

e portanto:

$$-\Delta u + 2u = F_1(t). \quad (6.38)$$

Como $f_1 \in H^1(\Omega)$ e $g_1 \in L^2(\Omega)$, aplicando a Teoria de regularidade elíptica na Equação (6.38), obtemos que $u \in H^2(\Omega)$. Assim, do Teorema de traço em $H^2(\Omega)$, segue que $u|_{\Gamma} \in H^{3/2}(\Gamma)$ e $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Por outro lado, fazendo $\tilde{u} \equiv 0$ em $\Omega \cup \Gamma$ no problema variacional (6.38), obtemos (6.36); para toda função $\tilde{\delta} \in L^2(\Gamma)$. Portanto

$$C_2(t)\delta + u|_{\Gamma} = F_2(t). \quad (6.39)$$

Note que $f_2, g_2 \in L^2(\Gamma)$ e $u|_{\Gamma} \in H^{3/2}(\Gamma)$. Como $f_1 \in H^1(\Omega)$, do Teorema do traço, segue que $(f_1)|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma)$. Assim da Equação (6.39), segue que $\delta \in L^2(\Gamma)$.

Finalmente, utilizando a fórmula de Green no problema variacional (6.37), fazendo $\tilde{u} \equiv 0$ em Ω e $\tilde{\delta} \equiv 0$ em Γ , obtemos:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \bar{\tilde{u}}|_{\Gamma} d\Gamma - \int_{\Gamma} \delta \bar{\tilde{u}}|_{\Gamma} d\Gamma = - \int_{\Gamma} f_2 \bar{\tilde{u}}|_{\Gamma} d\Gamma; \forall \tilde{u} \in H^1(\Omega).$$

Então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - \delta = -f_2. \quad (6.40)$$

Combinando a segunda equação em (6.30) e equação (6.40), obtemos: $z = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma}$. Assim, $z \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Portanto $U = (u, \delta, v, z, \varphi) \in D$, e é solução do sistema (6.25)–(6.29). Isto é, satisfaz $(I - \mathcal{A}(t))U = W$. Logo, $\mathcal{A}(t)$ é maximal, qualquer que seja $t \geq \tau$.

Do Teorema de Lummer-Phillips (Teorema 2.31) segue que, para cada $t \geq \tau$, o operador $\mathcal{A}(t)$ é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{S_t(s)\}_{s \geq 0}$ sobre o espaço de Hilbert \mathcal{H} . Assim, para cada $t \geq \tau$, existe uma constante $\omega(t) \geq 0$ tal que

$$\|S_t(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega(t)s}; \forall s \geq \tau.$$

Para finalizar a demonstração, precisamos mostrar que existe uma constante $\omega \geq 0$ independente de t satisfazendo (6.23). Como $\|\cdot\|_t$ e $\|\cdot\|_s$ são equivalentes, qualquer que sejam $t, s \geq \tau$ (ver Observação 6.1), as Observações 2.42 e 3.34 garantem que para obter (6.23), é suficiente mostrar que, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\frac{\|U\|_t}{\|U\|_s} \leq e^{c|t-s|}; \forall t, s \geq \tau \text{ e } \forall U \in \mathcal{H} - \{0\}. \quad (6.41)$$

Dado $c > 0$ qualquer, observe que $e^{c|t-s|} \geq 1$ para todo $t, s \geq \tau$. Além disso, como $\gamma'(t) \leq 0$ para todo $t \geq \tau$ (ver hipótese (6.18)). Assim, para todo $t \geq s \geq \tau$, do Teorema do valor médio, existem $r \in (t, s)$ tais que:

$$\gamma(t) = \gamma(s) + \gamma'(r)(t-s) \leq \gamma(s) \leq e^{c|t-s|}\gamma(s).$$

Assim, dado $U = (u, \delta, v, z, \varphi) \in \mathcal{H}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \|U\|_t^2 - \|U\|_s^2 e^{c|t-s|} &= (1 - e^{c|t-s|}) \left(\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|z\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) \\ &\quad + (\gamma(t) - \gamma(s) e^{c|t-s|}) \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \leq 0, \end{aligned}$$

e portanto, obtemos (6.41). \square

Proposição 6.3

$$\frac{d}{dt} \mathcal{A}(t) \in L_*^\infty(\tau, +\infty; \mathcal{L}(\mathcal{H}, D)), \quad (6.42)$$

onde $\mathcal{A}(t) : D \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador linear definido por (6.20).

Demonstração. Note que:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{A}(t) U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\gamma'(t) \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi(y) dy \\ 0 \end{pmatrix};$$

Então, dado $U = (u, \delta, v, z, \varphi) \in D$ e $t \geq \tau$, tem-se

$$\left\| \frac{d}{dt} \mathcal{A}(t) U \right\|^2 = \left\| \gamma'(t) \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi(y) dy \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 = |\gamma'(t)|^2 \cdot \left\| \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi(y) dy \right\|_{L^2(\Gamma)}^2. \quad (6.43)$$

Como $-\gamma_1 \leq \gamma'(t) \leq 0 < \gamma_1$; para todo $t \geq \tau$ (ver hipótese (6.18)), temos que

$$|\gamma'(t)| \leq \gamma_1; \quad \forall t \geq \tau. \quad (6.44)$$

Por outro lado,

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi(y) dy \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \sqrt{C(\alpha, \eta)} \left\| (y^2 + \eta)^{1/2} \varphi \right\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2. \quad (6.45)$$

Definindo $\|U\|_D^2 := \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \|A(t)U\|_{\mathcal{H}}^2$, aplicando as estimativas (6.44) e (6.45) em (6.43), obtemos:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt} \mathcal{A}(t) U \right\|^2 &= |\gamma'(t)|^2 \cdot \left\| \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi(y) dy \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq (\gamma_1)^2 \sqrt{C(\alpha, \eta)} \left\| (y^2 + \eta)^{1/2} \varphi \right\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \\ &\leq C \|U\|_D^2, \end{aligned}$$

onde $C = \max\{(\gamma_1)^2, \sqrt{C(\alpha, \eta)}\}$.

Portanto $\frac{d}{dt}\mathcal{A}(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, D)$ para todo $t \geq \tau$, e como a constante C não depende de t , temos (6.42). \square

Proposição 6.4

A aplicação $\mathcal{F} : [\tau, +\infty) \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definida em (6.21) é Lipschitziana em $t \geq \tau$, uniformemente em subconjuntos limitados de \mathcal{H} , e localmente Lipschitz sobre a variável $U \in \mathcal{H}$.

Demonstração. Da hipótese (6.8) e do Teorema do Valor Médio, temos que:

$$|f(u) - f(\tilde{u})| \leq |f'(u_0)| |u - \tilde{u}| \leq C(1 + |u_0|^{\rho-1}) |u - \tilde{u}|; \quad \forall u, \tilde{u} \in \mathbb{R}, \quad (6.46)$$

onde $\rho = 3$, se $N \in \{1, 2\}$, $1 \leq \rho \leq \frac{N}{N-2}$, se $N \geq 3$ e $u_0 = \lambda_0 u + (1 - \lambda_0) \tilde{u}$, com $0 < \lambda_0 < 1$.

Por outro lado, como $g \in C^1(\mathbb{R})$ (ver hipótese (6.10)), existem constantes $L, R > 0$ tais que

$$|g(v) - g(\tilde{v})| \leq L |v - \tilde{v}|; \quad \forall |v| < R \text{ e } |\tilde{v}| < R. \quad (6.47)$$

Além disso, utilizando as hipóteses (6.7) e (6.10), obtemos:

$$\begin{aligned} |c(t) - c(s)| \cdot |g(v)| &= |c(t) - c(s)| \cdot |g(v) - g(0)| \\ &\leq c_1 L |t - s| \cdot |v - 0| < c_1 L R |t - s|; \quad \forall t \geq s \geq \tau \text{ e } \forall |v| < R, \end{aligned} \quad (6.48)$$

Sejam $U = (u, \delta, \nu, z, \varphi, \phi)$, $\tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{\delta}, \tilde{\nu}, \tilde{z}, \tilde{\varphi}, \tilde{\phi})$ pontos na bola $B_{\sqrt{\tilde{R}}}(0) \subset \mathcal{H}$, onde $\tilde{R} = R^2 \cdot \text{med}(\Omega)$, e $u_0 = \lambda_0 u + (1 - \lambda_0) \tilde{u} \in H^1(\Omega)$, com $0 < \lambda_0 < 1$. Das imersões de Sobolev, temos que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, se $N = 1$; $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^8(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$, se $N = 2$; e $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho}(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+1}(\Omega)$, para $N \geq 3$ (Ver Teorema 1.25 e Corolário 1.26). Então, para $N = 1$, temos que $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_0 \|u_0\|_{H^1(\Omega)} < C_0 \sqrt{\tilde{R}}$, com $C_0 > 0$. Assim, de (6.46), segue que:

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(\tilde{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C^2 \int_{\Omega} (1 + |u_0|^2)^2 |u - \tilde{u}|^2 dx \\ &\leq C^2 (1 + \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}^2)^2 \|u - \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &< C^2 [1 + 2(C_0)^2 \tilde{R} + (C_0)^4 (\tilde{R})^2] \|u - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (6.49)$$

uma vez que $\|u - \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega)}^2$.

Para $N = 2$, temos $\|u\|_{L^8(\Omega)} \leq C_0 \|u\|_{H^1(\Omega)} < C_0 \sqrt{\tilde{R}}$ e $\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} < C_1 \sqrt{\tilde{R}}$, para todo $u \in H^1(\Omega)$. Então, de (6.46), segue que:

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(\tilde{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C^2 \int_{\Omega} (1 + |u_0|^2)^2 |u - \tilde{u}|^2 dx \\ &= C^2 \int_{\Omega} |u - \tilde{u}|^2 dx + 2C^2 \int_{\Omega} |u_0|^2 |u - \tilde{u}|^2 dx + C^2 \int_{\Omega} |u_0|^4 |u - \tilde{u}|^2 dx \\ &\leq C^2 \|u - \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2C^2 \|u_0\|_{L^4(\Omega)}^2 \|u - \tilde{u}\|_{L^4(\Omega)}^2 + C^2 \|u_0\|_{L^8(\Omega)}^4 \|u - \tilde{u}\|_{L^4(\Omega)}^2 \\ &\leq C^2 \|u - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 + 2C^2 (C_1)^4 \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^2 \|u - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 + C^2 (C_1 C_0)^2 \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^4 \|u - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &< C^2 [1 + 2(C_1)^4 \tilde{R} + (C_1 C_0)^2 (\tilde{R})^2] \|u - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Para $N \geq 3$, temos $\|u\|_{L^{2\rho}(\Omega)} \leq C_0 \|u\|_{H^1(\Omega)} < C_0 \sqrt{\tilde{R}}$ e $\|u\|_{L^{\rho+1}(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} < C_1 \sqrt{\tilde{R}}$, para todo $u \in H^1(\Omega)$. Como

$$\frac{\rho-1}{\rho+1} + \frac{2}{\rho+1} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{2(\rho-1)}{2\rho} + \frac{2}{2\rho} = 1,$$

aplicando de (6.46) e da Desigualdade de Hölder (Proposição A.5), segue que:

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(\tilde{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C^2 \int_{\Omega} (1 + |u_0|^{\rho-1})^2 |u - \tilde{u}|^2 dx \\ &= C^2 \int_{\Omega} |u - \tilde{u}|^2 dx + 2C^2 \int_{\Omega} |u_0|^{\rho-1} |u - \tilde{u}|^2 dx + C^2 \int_{\Omega} |u_0|^{2(\rho-1)} |u - \tilde{u}|^2 dx \\ &\leq C^2 \|u - \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2C^2 \|u_0\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^{\rho-1} \|u - \tilde{u}\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^2 + C^2 \|u_0\|_{L^{2\rho}(\Omega)}^{2(\rho-1)} \|u - \tilde{u}\|_{L^{2\rho}(\Omega)}^2 \\ &\leq C^2 \|u - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 + 2C^2 (C_1)^{\rho+1} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^{\rho-1} \|u - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 + C^2 (C_0)^{2\rho} \|u_0\|_{H^1(\Omega)}^{2(\rho-1)} \|u - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &< C^2 [1 + 2(C_1)^{\rho+1} (\tilde{R})^{(\rho-1)/2} + (C_0)^{2\rho} (\tilde{R})^{\rho-1}] \|u - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Por outro lado, de (6.47), segue que:

$$\|g(v) - g(\tilde{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |g(v) - g(\tilde{v})|^2 dx \leq L^2 \int_{\Omega} |v - \tilde{v}|^2 dx = L^2 \|v - \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (6.52)$$

Portanto, das estimativas (6.49)–(6.52), obtemos:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(t, U) - \mathcal{F}(t, \tilde{U})\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|f(u) + c(t)g(v) - f(\tilde{u}) - c(t)g(\tilde{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq 2\|f(u) - f(\tilde{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2c[(\tau)]^2 \|g(v) - g(\tilde{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \tilde{L} \left(\|u - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v - \tilde{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\leq \tilde{L} \|U - \tilde{U}\|_{\mathcal{H}}^2; \quad \forall U, \tilde{U} \in B_{\sqrt{\tilde{R}}}(0) \subset \mathcal{H} \text{ e } \forall t \geq \tau, \end{aligned}$$

onde $\tilde{L} = \max\{K, 2[L \cdot c(\tau)]^2\}$ e

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= 2C^2 [1 + 2(C_0)^2 \tilde{R} + (C_0)^4 (\tilde{R})^2], \quad \text{se } N = 1; \\ \tilde{L} &= 2C^2 [1 + 2(C_1)^4 \tilde{R} + (C_1 C_0)^2 (\tilde{R})^2], \quad \text{se } N = 2; \\ \tilde{L} &= 2C^2 [1 + 2(C_1)^{\rho+1} (\tilde{R})^{(\rho-1)/2} + (C_0)^{2\rho} (\tilde{R})^{\rho-1}], \quad \text{se } N \geq 3. \end{aligned}$$

Finalmente, dado $t \geq s \geq \tau$ e $\tilde{U} \in B_{\sqrt{\tilde{R}}}(0) \subset \mathcal{H}$, de (6.48), segue que:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(t, U) - \mathcal{F}(s, U)\|_{\mathcal{H}}^2 &= |c(t) - c(s)|^2 \|g(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 = |c(t) - c(s)|^2 \int_{\Omega} |g(v)|^2 dx \\ &\leq (C_1)^2 L^2 \tilde{R} |t - s|^2. \end{aligned}$$

□

Teorema 6.5 (Existência de Solução Local)

Seja $\tau \in \mathbb{R}$. Se $U_{\tau} = (u_{\tau}^0, \delta_{\tau}^0, u_{\tau}^1, \delta_{\tau}^1, 0) \in \mathcal{H}$, então existe $\tau < t_{max} \leq +\infty$, tal que o Problema de Cauchy não autônomo (6.19) admite uma única solução branda:

$$U \in C^0([0, t_{max}); \mathcal{H}), \quad (6.53)$$

dada por:

$$U(t) = P(t, \tau)U_\tau + \int_\tau^t P(t, s)[\mathcal{G}(s) - \mathcal{F}(s, U(s))] ds; \quad \forall t \in [\tau, t_{\max}), \quad (6.54)$$

onde $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ é o processo de evolução gerado pelo sistema CD de Kato $(\{\mathcal{A}(t)\}_{t \geq \tau}, \mathcal{H}, D)$.

Se $U_\tau \in D$ e $g \in H_{loc}^1(\tau, +\infty; L^2(\Omega))$, então a solução obtida é uma solução forte.

Demonstração. Observe que, a terna $(\{\mathcal{A}(t)\}_{t \geq \tau}, \mathcal{H}, D)$ forma um sistema CD de Kato (ver Observação 3.34). De fato, Já vimos que D está imerso e é denso em \mathcal{H} e que $D(A(t)) = D$, para todo $t \geq \tau$, e portanto a condição (i) para ser sistema CD de Kato é satisfeita por $(\{\mathcal{A}(t)\}_{t \geq \tau}, \mathcal{H}, D)$. Os itens (ii) e (iii) seguem das Proposição 6.2 e Proposição 6.3 respectivamente.

Por outro lado, da Proposição 6.4 segue que a aplicação $\mathcal{F} : [\tau, +\infty) \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definida em (6.21) é Lipschitziana em $t \geq \tau$, uniformemente em subconjuntos limitados de \mathcal{H} , e localmente Lipschitz sobre a variável $U \in \mathcal{H}$. Então, como $h \in L_{loc}^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega)) \subset L_{loc}^1(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$ (ver hipótese (6.11)), do Corolário 2.27 e da Observação 3.34 segue que existe $\tau < t_{\max} \leq +\infty$ e uma solução branda $U : [\tau, t_{\max}) \rightarrow \mathcal{H}$ do problema (6.18), satisfazendo (6.53) e (6.54).

Além disso, se $U_\tau \in D$ e $h \in H_{loc}^1(\tau, +\infty; L^2(\Omega)) \subset W_{loc}^{1,1}(\tau, +\infty; L^2(\Omega))$, do Corolário 2.27 e da Observação 3.34 segue que a solução obtida é uma solução forte. \square

6.1.3 Existência e Unicidade de Solução Global

Proposição 6.6

A energia associada ao problema (6.12)–(6.17) é dada por:

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\delta(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\delta_t\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\gamma(t)}{2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 + \int_\Omega F(u(x, t)) dx, \quad (6.55)$$

e satisfaz:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) - \langle h(t), u_t(t) \rangle_{L^2(\Omega)} &= -c(t) \langle g(u_t(t)), u_t(t) \rangle_{L^2(\Omega)} - \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy \\ &+ \frac{\gamma'(t)}{2} \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \leq -mc_0 \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \gamma_0 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy \leq 0, \end{aligned} \quad (6.56)$$

onde $F(u) = \int_\tau^u f(s) ds$ e $\gamma_0 = \frac{d_0}{\Gamma(\alpha) \Gamma(1 - \alpha)}$.

Demonstração. Multiplicando a equação (6.12) por u_t , integrando em relação a x sobre Ω , utilizando a fórmula de Green, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u_t(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx - \int_\Gamma u(t) \frac{\partial u(t)}{\partial \nu} d\Gamma + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |u(t)|^2 dx \\ + \int_\Omega f(u(t)) u_t(t) dx + c(t) \int_\Omega g(u_t(t)) u_t(t) dx = \int_\Omega h(t) u_t(t) dx. \end{aligned}$$

Como $\|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$, $\frac{d}{dt}F(u(t)) = f(u(t))u_t(t)$ e $\delta_t(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma}$ (equação (6.15)), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u(t)) dx - \int_{\Gamma} u(t)|_{\Gamma} \delta_t(t) d\Gamma \\ & + c(t) \int_{\Omega} g(u_t(t)) u_t(t) dx = \int_{\Omega} h(t) u_t(t) dx. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Agora, multiplicando a equação (6.13) por δ_t , integrando em relação a x sobre Γ , obtemos:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \gamma(t) \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi(t, y) \delta_t(t) dy d\Gamma = - \int_{\Gamma} u(t)|_{\Gamma} \delta_t(t) d\Gamma. \quad (6.58)$$

Substituindo a equação (6.58) na equação (6.57), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u(t)) dx \\ & + c(t) \int_{\Omega} g(u_t(t)) u_t(t) dx + \gamma(t) \int_{\Gamma} \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi(t, y) \delta_t(t) dy d\Gamma = \int_{\Omega} h(t) u_t(t) dx. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Por outro lado, ao multiplicar a Equação (6.14) por $\gamma(t)\varphi(t)$, e, em seguida, integrar com respeito a variável y sobre \mathbb{R} , obtemos:

$$\frac{\gamma(t)}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t, y)|^2 dy + \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\varphi(t, y)|^2 dy = \gamma(t) \delta_t(t) \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi(t, y) dy,$$

e como

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) |\varphi(t)|^2 = \gamma(t) \frac{d}{dt} |\varphi(t)|^2 + \gamma'(t) |\varphi(t)|^2,$$

obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\gamma(t)}{2} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t, y)|^2 dy - \frac{\gamma'(t)}{2} \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t, y)|^2 dy + \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) |\varphi(t, y)|^2 dy \\ & = \gamma(t) \delta_t(t) \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi(t, y) dy. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Substituindo à expressão (6.60) em (6.59), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{d}{dt} \frac{\gamma(t)}{2} \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \\ & + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u(t)) dx + c(t) \int_{\Omega} g(u_t(t)) u_t(t) dx + \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy \\ & = \int_{\Omega} h(t) u_t(t) dx + \frac{\gamma'(t)}{2} \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Observe que, das hipóteses (6.7) e (6.18), temos $-c(t) \leq -c_0$, $-\gamma(t) \leq \gamma_0$ e $\gamma'(t) \leq 0$, para todo $t \geq \tau$. Além disso, da hipótese (6.10) e do Teorema Valor Médio, segue que:

$$g(u_t(t)) u_t(t) = [g(u_t(t)) - g(0)] u_t(t) \geq m |u_t(t)|^2.$$

Assim, de (6.61), obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{d}{dt} \frac{\gamma(t)}{2} \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \\
 & + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u(t)) dx - \langle h(t), u_t(t) \rangle_{L^2(\Omega)} \\
 & = -c(t) \langle g(u_t(t)), u_t(t) \rangle_{L^2(\Omega)} - \gamma(t) + \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy + \frac{\gamma'(t)}{2} \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \\
 & \leq -mc_0 \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \gamma_0 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy
 \end{aligned}$$

□

Teorema 6.7 (Existência e Unicidade de Solução Global)

Se $u_{\tau}^0 \in H^1(\Omega)$, $\delta_{\tau}^0 \in L^2(\Gamma)$, $u_{\tau}^1 \in L^2(\Omega)$ e $\delta_{\tau}^1 \in L^2(\Gamma)$, o problema de valor inicial e de contorno (6.2)–(6.6), admite uma única solução branda (u, δ) com a seguinte regularidade:

$$\begin{cases} u \in C^0([\tau, +\infty); H^1(\Omega)) \cap C^1([\tau, +\infty); L^2(\Omega)) \\ \delta \in C^0([\tau, +\infty); L^2(\Gamma)) \cap C^1([\tau, +\infty); L^2(\Gamma)). \end{cases} \quad (6.62)$$

Se $u_{\tau}^0 \in H^2(\Omega)$, $\delta_{\tau}^0 \in L^2(\Gamma)$, $u_{\tau}^1 \in H^1(\Omega)$, $\delta_{\tau}^1 = \frac{\partial u_{\tau}^0}{\partial \nu} = 0$ e $h \in H_{loc}^1(\tau, +\infty; L^2(\Omega))$, então o problema de valor inicial e de contorno (6.2)–(6.6) admite uma única solução forte (u, δ) com a seguinte regularidade global:

$$\begin{cases} u \in L^{\infty}(\tau, +\infty; H^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(\tau, +\infty; L^2(\Omega)) \\ \delta \in L^{\infty}(\tau, +\infty; L^2(\Gamma)) \cap W^{1,\infty}(\tau, +\infty; L^2(\Gamma)). \end{cases} \quad (6.63)$$

se $u_{\tau}^0 \in H^2(\Omega)$, $\delta_{\tau}^0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $u_{\tau}^1 \in H^1(\Omega)$, $\delta_{\tau}^1 = \frac{\partial u_{\tau}^0}{\partial \nu} = 0$, $h \in H_{loc}^1(\tau, +\infty; L^2(\Omega))$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitziana, então, além das regularidades globais em (6.63), obtemos as seguinte regularidade local:

$$\begin{cases} u \in L_{loc}^{\infty}(\tau, +\infty; H^2(\Omega)) \cap W_{loc}^{1,\infty}(\tau, +\infty; H^1(\Omega)) \cap W_{loc}^{2,\infty}(\tau, +\infty; L^2(\Omega)) \\ \delta \in L_{loc}^{\infty}(0, +\infty; H^{1/2}(\Gamma)) \cap W_{loc}^{1,\infty}(\tau, +\infty; H^{1/2}(\Gamma)) \cap W_{loc}^{2,\infty}(\tau, +\infty; L^2(\Gamma)) \end{cases} \quad (6.64)$$

Demonação. Sejam $u_{\tau}^0 \in H^1(\Omega)$, $\delta_{\tau}^0 \in L^2(\Gamma)$, $u_{\tau}^1 \in L^2(\Omega)$ e $\delta_{\tau}^1 \in L^2(\Gamma)$. Então $U_{\tau} = (u_{\tau}^0, \delta_{\tau}^0, u_{\tau}^1, \delta_{\tau}^1, 0) \in \mathcal{H}$. Assim, do Teorema 6.5, existe $0 < t_{\max} \leq +\infty$ e uma função $U \in C^0([0, t_{\max}; \mathcal{H}])$ dada por $U(t) = (u(t), \delta(t), v(t), z(t), \varphi(t))$, que é uma solução branda para problema (6.19) em $[\tau, t_{\max})$ satisfazendo (6.53), e portanto uma solução branda local para o problema (6.12)–(6.17). Em termos das coordenadas, temos:

$$\begin{cases} u \in C^0([0, t_{\max}); H^1(\Omega)) \cap C^1([0, t_{\max}); L^2(\Omega)) \\ \delta \in C^0([0, t_{\max}); L^2(\Gamma)) \cap C^1([0, t_{\max}); L^2(\Gamma)). \end{cases}$$

Se $u_{\tau}^0 \in H^2(\Omega)$, $\delta_{\tau}^0 \in L^2(\Gamma)$, $u_{\tau}^1 \in H^1(\Omega)$ e $\delta_{\tau}^1 = \frac{\partial u_{\tau}^0}{\partial \nu} = 0$ temos $U_{\tau} = (u_{\tau}^0, \delta_{\tau}^0, u_{\tau}^1, \delta_{\tau}^1, 0) \in D$, onde $\mathcal{A}(t) : D \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador linear definido em (6.19). Supondo $h \in H_{loc}^1(\tau, +\infty; L^2(\Omega))$, do

Teorema 6.5, temos que $U : [\tau, t_{\max}] \rightarrow \mathcal{H}$; $U(t) = (u(t), \delta(t), v(t), z(t), \varphi(t))$ é uma solução forte local para problema (6.19), e portanto uma solução forte local para o problema (6.12)–(6.17) (ver definições 2.13 e 2.17). Então:

- (i) U é diferenciável em quase todo ponto $t \in [\tau, t_{\max}]$;
- (ii) $U_t \in L^1(\tau, t_{\max}; \mathcal{H})$;
- (iii) $U(\tau) = U_\tau = (u_\tau^0, \delta_\tau^0, u_\tau^1, \delta_\tau^1, 0)$ e $U_t(t) - \mathcal{A}(t)U(t) + \mathcal{F}(t, U(t)) = \mathcal{G}(t)$, em quase todo ponto $t \in [\tau, +t_{\max}]$.

Em termos das componentes, temos que: u , u_t , δ e δ_t são diferenciáveis em quase todo ponto $t \in [\tau, t_{\max}]$. Além disso:

$$\begin{cases} u_t \in L^1(\tau, t_{\max}; H^1(\Omega)) \\ \delta_t \in L^1(\tau, t_{\max}; L^2(\Gamma)) \\ u_{tt} \in L^1(\tau, t_{\max}; L^2(\Omega)) \\ \delta_{tt} \in L^1(\tau, t_{\max}; L^2(\Gamma)) \end{cases}$$

Considere a energia $E : [0, t_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}$ associada a essa solução. Da Proposição 6.6 temos que $E(t)$ é dado por (6.55), e satisfaz (6.56). Portanto, dado $U(t) = (u(t), \delta(t), u_t(t), \delta_t(t), \varphi(t)) \in D$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &\leq C(\varepsilon)\|h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon\|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - mc_0\|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \gamma_0 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy \\ &= C(\varepsilon)\|h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\varepsilon - mc_0)\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\gamma_0}{2} \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\Omega)}^2 dy \\ &\leq C(\varepsilon)\|h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \tag{6.65}$$

onde $0 < \varepsilon < mc_0$.

Agora, integrando a expressão (6.65) de τ a t , obtemos:

$$E(t) \leq E(\tau) + C(\varepsilon) \int_{\tau}^t \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds,$$

e portanto, de (6.55), obtemos:

$$\frac{1}{2}\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_{\Omega} F(u(x, t)) dx \leq \frac{1}{2}\|U_\tau\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_{\Omega} F(u_\tau^0(x)) dx + C(\varepsilon) \int_{\tau}^t \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds; \tag{6.66}$$

para todo $\tau \leq t < t_{\max}$, onde $U_\tau = (u_\tau^0, \delta_\tau^0, u_\tau^1, \delta_\tau^1, 0)$.

Da hipótese (6.8) segue que:

$$|f(u)| \leq |f(\tau)| + \int_{\tau}^u f'(s) ds \leq |f(\tau)| + C \int_{\tau}^u (1 + s^{\rho-1}) ds \leq C_0(1 + |u|^{\rho}) \quad (C_0 > 0),$$

e portanto

$$F(u) \leq \int_{\tau}^u |f(u)| \leq C_0 \int_{\tau}^u (1 + |s|^{\rho}) ds \leq C_1(1 + |u|^{\rho+1}) \quad (C_1 > 0). \tag{6.67}$$

Assim, de (6.67), da hipótese (6.9) e da imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+1}(\Omega)$, temos que:

$$-\frac{\beta}{2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 - m_f \cdot med(\Omega) \leq \int_{\Omega} F(u(x)) dx \leq \widetilde{C}_1 \left(med(\Omega) + \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\rho+1} \right); \forall u \in H^1(\Omega). \quad (6.68)$$

Finalmente, de (6.66) e (6.68), temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1-\beta}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \frac{1}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{\beta}{2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\leq - \int_{\Omega} F(u(x, t)) dx - \frac{\beta}{2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|U_{\tau}\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_{\Omega} F(u_{\tau}^0(x)) dx + C(\varepsilon) \int_{\tau}^t \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ &\leq m_f \cdot med(\Omega) + \frac{1}{2} \|U_{\tau}\|_{\mathcal{H}}^2 + \widetilde{C}_1 \left(med(\Omega) + \|u_{\tau}^0\|_{H^1(\Omega)}^{\rho+1} \right) + C(\varepsilon) \int_{\tau}^t \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \end{aligned}$$

e portanto:

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C(U_{\tau}) + \widetilde{C}(\varepsilon) \int_{\tau}^t \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds; \forall \tau \leq t < t_{\max}, \quad (6.69)$$

onde

$$C(U_{\tau}) = \frac{2m_f \cdot med(\Omega)}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta} \|U_{\tau}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{2\widetilde{C}_1}{1-\beta} \left(med(\Omega) + \|u_{\tau}^0\|_{H^1(\Omega)}^{\rho+1} \right) \text{ e } \widetilde{C}(\varepsilon) = \frac{2C(\varepsilon)}{1-\beta}.$$

Por outro lado, da hipótese (6.11) segue que:

$$\int_{-\infty}^t e^{\sigma_0 s} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds < \infty; \forall t \in \mathbb{R}.$$

Então

$$\begin{aligned} \widetilde{C}(\varepsilon) \int_{\tau}^t \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds &= \widetilde{C}(\varepsilon) \int_{\tau}^t e^{\sigma_0(s-\tau)} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ &\leq \widetilde{C}(\varepsilon) \sup_{s \in (\tau, t)} \{e^{-\sigma_0(s-\tau)}\} \int_{-\infty}^t e^{\sigma_0 s} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ &\leq \widetilde{C}(\varepsilon) C(\tau) \int_{-\infty}^t e^{\sigma_0 s} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds < \infty; \forall t \geq \tau, \end{aligned} \quad (6.70)$$

onde $C(\tau) = \sup_{s \in (\tau, t)} \{e^{-\sigma_0(s-\tau)}\} = e^{-\sigma_0 \tau}$.

Finalmente, de (6.69) e (6.70), obtemos:

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C(U_{\tau}) + \widetilde{C}(\varepsilon) \int_{\tau}^t \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq C(U_{\tau}, \tau); \forall \tau \leq t < t_{\max}, \quad (6.71)$$

e portanto

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C(U_{\tau}, \tau) < \infty. \quad (6.72)$$

Assim, o limite (6.72), o corolário 2.27 e a Observação 3.34, garantem que $t_{\max} = +\infty$.

Em resumo, dadas as funções $u_{\tau}^0 \in H^1(\Omega)$, $\delta_{\tau}^0 \in L^2(\Gamma)$ e $u_{\tau}^1, \delta_{\tau}^1 \in L^2(\Omega)$, existe uma única solução branda (u, δ) satisfazendo (6.62). Agora, Se $u_{\tau}^0 \in H^2(\Omega)$, $\delta_{\tau}^0 \in L^2(\Gamma)$, $u_{\tau}^1 \in H^1(\Omega)$, $\delta_{\tau}^1 = \frac{\partial u_{\tau}^0}{\partial \nu} = 0$ e $h \in H_{loc}^1(\tau, +\infty; L^2(\Omega))$, então (u, δ) é uma solução forte. Portanto, as funções u , u_t , δ , δ_t são diferenciáveis em quase todo ponto $t \geq \tau$, e

$$\begin{cases} u_t \in L^1(\tau, +\infty; H^1(\Omega)) \\ \delta_t \in L^1(\tau, +\infty; L^2(\Gamma)) \\ u_{tt} \in L^1(\tau, +\infty; L^2(\Omega)) \\ \delta_{tt} \in L^1(\tau, +\infty; L^2(\Gamma)). \end{cases} \quad (6.73)$$

Além disso, a estimativa (6.71) combinada com (6.73), garantem as seguintes regularidade:

$$\begin{cases} u \in L^\infty(\tau, +\infty; H^1(\Omega)) \\ \delta \in L^\infty(\tau, +\infty; L^2(\Omega)) \\ u_t \in L^\infty(\tau, +\infty; L^2(\Omega)) \cap L^1(\tau, +\infty; H^1(\Omega)) \\ \delta_t \in L^\infty(\tau, +\infty; L^2(\Gamma)) \cap L^1(\tau, +\infty; L^2(\Gamma)) \\ u_{tt} \in L^1(\tau, +\infty; L^2(\Omega)) \\ \delta_{tt} \in L^1(\tau, +\infty; L^2(\Gamma)), \end{cases} \quad (6.74)$$

o que prova (6.63).

Para obter uma melhor regularidade, derive as equações do sistema (6.12)–(6.14) em relação a variável t . Uma vez feito, obtemos:

$$u_{ttt}(t) - \Delta u_t(t) + u_t(t) + f'(u(t))u_t(t) + c(t)g'(u_t(t))u_{tt}(t) + c'(t)g(u_t(t)) = h_t, \quad (6.75)$$

$$\delta_{ttt}(t) + \delta_t(t) + \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} p(y)\varphi_t(t, y) dy + \gamma'(t) \int_{\mathbb{R}} p(y)\varphi(t, y) dy = -u_{tt}(t), \quad (6.76)$$

$$\varphi_{tt}(t, y) + (y^2 + \eta)\varphi_t(t, y) - p(y)\delta_{tt}(t) = 0. \quad (6.77)$$

Multiplicando as equações (6.75) e (6.76) por $u_{tt}(t)$ e $\delta_{tt}(tt)$, respectivamente, integrando em relação à variável x sobre Ω e ξ sobre Γ , respectivamente, e utilizando a condição de bordo (6.15), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{tt}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 - \int_{\Gamma} (u_{tt})_{|\Gamma}(t) \delta_{tt}(t) d\Gamma + c(t) \int_{\Omega} g'(u_t(t)) |u_{tt}(t)|^2 dx \\ & + c'(t) \int_{\Omega} g(u_t(t)) u_{tt}(t) dx = \int_{\Omega} h_t(t) u_{tt}(t) dx - \int_{\Omega} f'(u(t)) u_t(t) u_{tt}(t) dx \end{aligned} \quad (6.78)$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta_{tt}(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta_t\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \varphi_t(t, y) \delta_{tt}(t) d\Gamma dy \\ & + \gamma'(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \varphi(t, y) \delta_{tt}(t) d\Gamma dy = - \int_{\Omega} (u_{tt})_{|\Gamma}(t) \delta_{tt}(t) d\Gamma. \end{aligned} \quad (6.79)$$

Substituindo (6.79) em (6.78), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_{tt}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta_{tt}(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\delta_t\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ & + \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \varphi_t(t, y) \delta_{tt}(t) d\Gamma dy + \gamma'(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \varphi(t, y) \delta_{tt}(t) d\Gamma dy \\ & = \int_{\Omega} h_t(t) u_{tt}(t) dx - \int_{\Omega} f'(u(t)) u_t(t) u_{tt}(t) dx - c(t) \int_{\Omega} g'(u_t(t)) |u_{tt}(t)|^2 dx \\ & - c'(t) \int_{\Omega} g(u_t(t)) u_{tt}(t) dx. \end{aligned} \quad (6.80)$$

Por outro lado, multiplicando a Equação (6.77) por $\gamma(t)\varphi_t(t)$, e integrando em (ξ, y) sob $\mathbb{R} \times \Gamma$, obtemos:

$$\frac{\gamma(t)}{2} \frac{d}{dt} \|\varphi_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 + \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy = \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} p(y) \varphi_t(t) \delta_{tt}(t) d\Gamma dy. \quad (6.81)$$

Agora, como

$$\frac{d}{dt}\gamma(t)|\varphi(t)|^2 = \gamma(t)\frac{d}{dt}|\varphi(t)|^2 + \gamma'(t)|\varphi(t)|^2,$$

substituindo a Equação (6.81) em (6.80), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{tt}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\delta_{tt}(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\delta_t\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{d}{dt}\frac{\gamma(t)}{2}\|\varphi_t\|_{L^2(\mathbb{R};L^2(\Gamma))}^2 \\ &= \int_{\Omega} h_t(t)u_{tt}(t)dx - \int_{\Omega} f'(u(t))u_t(t)u_{tt}(t)dx - c(t)\int_{\Omega} g'(u_t(t))|u_{tt}(t)|^2dx \\ &\quad - c'(t)\int_{\Omega} g(u_t(t))u_{tt}(t)dx + \frac{\gamma'(t)}{2}\|\varphi_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R};L^2(\Gamma))}^2 - \gamma(t)\int_{\mathbb{R}}(y^2 + \eta)\|\varphi_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2dy \\ &\quad - \gamma'(t)\int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma} p(y)\varphi(t,y)\delta_{tt}(t)d\Gamma dy. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Como $c(t) \geq c_0$, $c'(t) \leq 0 < c_1$, $-\gamma_1 \leq \gamma'(t) \leq 0 < \gamma_0 \leq \gamma(t)$, $g'(u_t(t)) \geq m$ para todo $t \geq \tau$ e $g(u_t(t))u_{tt}(t) = (g(u_t(t)) - g(0))u_{tt}(t) \geq mu_t(t)u_{tt}(t)$ (ver hipóteses (6.7), (6.10) e (6.18)), para todo $t \geq \tau$, temos:

$$\frac{\gamma'(t)}{2}\|\varphi_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R};L^2(\Gamma))}^2 < \frac{\gamma(t)}{2}\|\varphi_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R};L^2(\Gamma))}^2, \quad (6.83)$$

$$-\gamma(t)\int_{\mathbb{R}}(y^2 + \eta)\|\varphi_t(t,y)\|_{L^2(\Gamma)}^2dy \leq -\gamma_0\int_{\mathbb{R}}(y^2 + \eta)\|\varphi_t(t,y)\|_{L^2(\Gamma)}^2dy \leq 0, \quad (6.84)$$

$$-c(t)\int_{\Omega}g'(u_t(t))|u_{tt}(t)|^2 \leq -mc_0\|u_{tt}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0, \quad (6.85)$$

$$-c'(t)\int_{\Omega}g(u_t(t))u_{tt}(t)dx \leq -mc_1\int_{\Omega}u_t(t)u_{tt}(t)dx \leq \frac{mc_1}{2}\left(\|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_{tt}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right). \quad (6.86)$$

Além disso, observe que, como

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}}p(y)\varphi(t,y)dy\right| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}}\frac{|p(y)|^2}{y^2 + \eta}dy\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}}(y^2 + \eta)|\varphi(t,y)|^2dy\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{C(\alpha, \eta, 0)}\left(\int_{\mathbb{R}}(y^2 + \eta)|\varphi(t,y)|^2dy\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

temos que

$$\left\|\int_{\mathbb{R}}p(y)\varphi(t,y)dy\right\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq C(\alpha, \eta, 0)\int_{\mathbb{R}}(y^2 + \eta)\|\varphi(t,y)\|_{L^2(\Gamma)}^2dy. \quad (6.87)$$

Da Equação (6.14), segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R};L^2(\Gamma))}^2 + \int_{\mathbb{R}}(y^2 + \eta)\|\varphi(t,y)\|_{L^2(\Gamma)}^2dy - \int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega}p(y)\varphi(t,y)\delta_t(t)d\Gamma dy = 0,$$

e portanto, de (6.87) segue que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R};L^2(\Gamma))}^2 + \int_{\mathbb{R}}(y^2 + \eta)\|\varphi(t,y)\|_{L^2(\Gamma)}^2dy \leq \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}\left\|\int_{\mathbb{R}}p(y)\varphi(t,y)dy\right\|_{L^2(\Gamma)} \\ & \leq \sqrt{C(\alpha, \eta, 0)}\|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}\left(\int_{\mathbb{R}}(y^2 + \eta)\|\varphi(t,y)\|_{L^2(\Gamma)}^2dy\right)^{1/2} \\ & \leq \frac{C(\alpha, \eta, 0)}{2}\|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(y^2 + \eta)\|\varphi(t,y)\|_{L^2(\Gamma)}^2dy. \end{aligned}$$

Então

$$\int_{\mathbb{R}}(y^2 + \eta)\|\varphi(t,y)\|_{L^2(\Gamma)}^2dy \leq \frac{C(\alpha, \eta, 0)}{2}\|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R};L^2(\Gamma))}^2. \quad (6.88)$$

Assim, como $-\gamma'(t) \leq \gamma_1$; $\forall t \geq \tau$, das estimativas (6.87) e (6.88), obtemos:

$$\begin{aligned}
-\gamma'(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \varphi(t, y) \delta_{tt}(t) d\Gamma dy &\leq \gamma_1 \|\delta_{tt}(t)\|_{L^2(\Gamma)} \left\| \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi(y, t) dy \right\|_{L^2(\Gamma)} \\
&\leq \frac{(\gamma_1)^2}{2} \|\delta_{tt}(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2} \left\| \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi(t, y) dy \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\
&\leq \frac{(\gamma_1)^2}{2} \|\delta_{tt}(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{C(\alpha, \eta, 0)}{2} \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy \\
&\leq \frac{(\gamma_1)^2}{2} \|\delta_{tt}(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{[C(\alpha, \eta, 0)]^2}{4} \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \frac{C(\alpha, \eta, 0)}{4} \frac{d}{dt} \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \\
&\leq \frac{C_2}{2} \left(\|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\delta_{tt}(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) - C_3 \frac{d}{dt} \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2,
\end{aligned} \tag{6.89}$$

onde $C_2 = \max\{(\gamma_1)^2/2, [C(\alpha, \eta, 0)]^2/4\}$ e $C_3 = C(\alpha, \eta, 0)/4$.

Por outro lado, como $\frac{\rho-1}{2\rho} + \frac{1}{2\rho} + \frac{1}{2} = 1$, da Desigualdade de Hölder (Proposição (A.5)), da hipótese (6.8), da imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho}(\Omega)$ e da estimativa (6.71), obtemos:

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} f'(u(t)) u_t(t) u_{tt}(t) dx &\leq C \int_{\Omega} (1 + |u(t)|^{\rho-1}) |u_t(t)| \cdot |u_{tt}(t)| dx \\
&= C \int_{\Omega} |u_t(t) u_{tt}(t)| dx + C \int_{\Omega} |u(t)|^{\rho-1} |u_t(t) u_{tt}(t)| dx \\
&\leq C \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u_{tt}(t)\|_{L^2(\Omega)} + C \|u(t)\|_{L^{2\rho}(\Omega)}^{\rho-1} \|u_t(t)\|_{L^{2\rho}(\Omega)} \cdot \|u_{tt}(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \|u_t(t)\|_{H^1(\Omega)} \|u_{tt}(t)\|_{L^2(\Omega)} + C (\widetilde{C}_1)^{\rho} [C(U_{\tau}, \tau)]^{\frac{\rho-1}{2}} \|u_t(t)\|_{H^1(\Omega)} \|u_{tt}(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&= C \left(1 + (\widetilde{C}_1)^{\rho} [C(U_{\tau}, \tau)]^{\frac{\rho-1}{2}} \right) \|u_t(t)\|_{H^1(\Omega)} \|u_{tt}(t)\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{C_4(U_{\tau}, \tau)}{2} \left(\|u_t(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_{tt}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right); \forall t \geq \tau,
\end{aligned} \tag{6.90}$$

onde \widetilde{C}_1 é a constante da imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho_1}(\Omega)$ e $C_4(U_{\tau}, \tau) = C \left(1 + (\widetilde{C}_1)^{\rho} [C(U_{\tau}, \tau)]^{\frac{\rho-1}{2}} \right)$.

Finalmente, como $h \in H_{loc}^1(0, +\infty; L^2(\Omega))$, existe constante $\widetilde{C} > 0$ tal que

$$\|h_t(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \widetilde{C}; \forall t \geq \tau,$$

e portanto

$$\int_{\Omega} h_t(t) u_{tt}(t) dx \leq \frac{1}{2} \|h_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u_{tt}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\widetilde{C}}{2} + \frac{1}{2} \|u_{tt}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2; \forall t \geq \tau. \tag{6.91}$$

Agora, aplicando as estimativas (6.83)–(6.86) e (6.89)–(6.91) em (6.82), obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|U_t(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + C_3 \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \right) &\leq \frac{\widetilde{C}}{2} + \frac{C_4(U_{\tau}, \tau) + mc_1}{2} \|u_t(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{C_2}{2} \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\
&+ \frac{1 + C_4(U_{\tau}, \tau) + mc_1}{2} \|u_{tt}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_2}{2} \|\delta_{tt}(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\gamma(t)}{2} \|\varphi_t(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 + \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \\
&\leq \frac{\widetilde{C}}{2} + C_5 \left(\frac{1}{2} \|U_t(t)\|^2 + C_3 \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \right); \forall \tau \leq t < T,
\end{aligned} \tag{6.92}$$

onde $C_5 = \max\{1 + C_4 + mc_1, C_2, 1/C_3\}$ e $U_t(t) = (u_t(t), \delta_t(t), u_{tt}(t), \delta_{tt}(t), \varphi(t))$.

Seja $T > \tau$ qualquer. Como $\varphi(\tau, y) = 0$, para todo $y \in \mathbb{R}$, integrando a desigualdade (6.92) de τ a $t \leq T$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|U_t(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \frac{1}{2} \|U_t(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + C_3 \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|U_t(\tau)\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{\tilde{C}(T-\tau)}{2} + C_5 \int_{\tau}^t \left(\frac{1}{2} \|U_t(s)\|_{\mathcal{H}}^2 + C_3 \|\varphi(s)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \right) ds, \end{aligned} \quad (6.93)$$

para todo $\tau < t \leq T$.

Suponha que $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Lipschitziana. Assim, como $g(0) = 0$ (ver hipótese (6.10)), existe constante $M > 0$ tal que

$$|g(v)| \leq M|v|; \forall v \in \mathbb{R}. \quad (6.94)$$

Fazendo $t = \tau$ na equação (6.12), obtemos:

$$\|u_{tt}(\tau)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\Delta u_{\tau}^0\|_{L^2(\Omega)} + \|u_{\tau}^0\|_{L^2(\Omega)} + \|u_{\tau}^0\|_{L^{2\rho}(\Omega)}^{\rho} + Mc(\tau) \|u_{\tau}^1\|_{L^2(\Omega)} + \|h(\tau)\|_{L^2(\Omega)} := \tilde{C}_1, \quad (6.95)$$

uma vez que $u(\tau) = u_{\tau}^0 \in H^2(\Omega)$, $u_t(\tau) = u_{\tau}^1 \in H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, $h(\tau) \in L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho}(\Omega)$, e da hipótese (6.8) e da desigualdade (6.94), segue que:

$$\|f(u_{\tau}^0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\int_{\Omega} |u_{\tau}^0|^{2\rho} dx \right)^{1/2} = C \|u_{\tau}^0\|_{L^{2\rho}(\Omega)}^{\rho} \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} |g(u_{\tau}^1)|^2 dx \leq M^2 \int_{\Omega} |u_{\tau}^1|^2 dx.$$

Procedendo de maneira análoga, com a equação (6.13), obtemos:

$$\|\delta_{tt}(\tau)\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|\delta_{\tau}^0\|_{L^2(\Gamma)} + \|(u_{\tau}^1)|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} := \tilde{C}_2, \quad (6.96)$$

pois $\delta(\tau) = \delta_{\tau}^0 \in L^2(\Gamma)$, $\varphi(\tau, y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$, e como $u_t(\tau) = u_{\tau}^1 \in H^1(\Omega)$, do teorema de Traço segue que $(u_t(\tau))|_{\Gamma} = (u_{\tau}^1)|_{\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$.

Além disso, como $u(\tau) = u_{\tau}^1 \in H^1(\Omega)$ e $\delta_t(\tau) = \delta_{\tau}^1 = 0$, temos que:

$$\|u_t(\tau)\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u_{\tau}^1\|_{H^1(\Omega)}^2 := \tilde{C}_3 \quad \text{e} \quad \|\delta_t(\tau)\|_{L^2(\Gamma)} = \|\delta_{\tau}^1\|_{L^2(\Gamma)}^2 = 0. \quad (6.97)$$

Por outro lado, $t = \tau$ na Equação (6.14), obtemos:

$$\varphi_t(\tau, y) = -(y^2 + \eta) \varphi(\tau, y) + p(y) \delta_t(\tau) = p(y) \delta_{\tau}^1 = 0; \forall y \in \mathbb{R}.$$

Portanto

$$\gamma(\tau) \|\varphi_t(\tau, y)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 = 0. \quad (6.98)$$

Assim, utilizando as estimativas (6.95)–(6.98) em (6.93), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|U_t(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \frac{1}{2} \|U_t(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + C_3 \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \\ &\leq \tilde{C}(U_{\tau}, \tau) + C_5 \int_{\tau}^t \left(\frac{1}{2} \|U_t(s)\|_{\mathcal{H}}^2 + C_3 \|\varphi(s)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \right) ds, \end{aligned} \quad (6.99)$$

onde

$$\tilde{C}(U_\tau, \tau) = \frac{1}{2} \left(\tilde{C}(T - \tau) + \tilde{C}_1^2 + \tilde{C}_2^2 + \tilde{C}_3 \right)$$

Finalmente, aplicando o Lema de Gronwall (Proposição (A.7)), na estimativa (6.99), segue que:

$$\|U_t(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|U_t(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + C_3 \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \leq 2\tilde{C}(U_\tau, \tau) e^{2C_5 T} < \infty, \quad (6.100)$$

para todo $\tau < t \leq T$.

Portanto:

$$\begin{cases} u_t \in L_{loc}^\infty(0, +\infty; H^1(\Omega)) \\ \delta_t \in L_{loc}^\infty(0, +\infty; L^2(\Gamma)) \\ u_{tt} \in L_{loc}^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)) \\ \delta_{tt} \in L_{loc}^\infty(0, +\infty; L^2(\Gamma)). \end{cases} \quad (6.101)$$

Por outro lado, da Equação (6.12), das estimativas (6.71) e (6.93), da hipótese (6.8), e da desigualdade (6.94), obtemos:

$$\|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_{tt}(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|u(t)\|_{L^{2\rho}(\Omega)}^\rho + Mc(\tau) \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|h(t)\|_{L^2(\Omega)} := \tilde{C}_4 < \infty,$$

para todo $\tau < t < T$.

Portanto

$$u \in L_{loc}^\infty(\tau, +\infty; H^2(\Omega)), \quad (6.102)$$

e como $\delta_t = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, do Teorema de traço em $H^2(\Omega)$, segue que $\|\delta_t\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^2(\Omega)}$ ($C > 0$ constante). Portanto:

$$\|\delta_t(t)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C\|u(t)\|_{H^2(\Omega)} := \tilde{C}_5; \quad \forall \tau < t \leq T. \quad (6.103)$$

Suponha $\delta(\tau) = \delta_\tau^0 \in H^{1/2}(\Gamma)$. Como $\delta(t) = \delta_\tau^0 + \int_\tau^t \delta_s(s) ds$, temos que $\delta(t) \in H^{1/2}(\Gamma)$ e

$$\|\delta(t)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq \|\delta_\tau^0\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \int_\tau^t \|\delta_s(s)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} ds \leq \tilde{C}_5(T - \tau) < \infty; \quad \forall \tau < t \leq T. \quad (6.104)$$

Por fim, das regularidades obtidas em (6.74), (6.101) e (6.102), e das estimativas (6.103) e (6.104), obtemos que a solução forte global (u, δ) do problema (6.2)–(6.6) possui as seguintes regularidades:

$$\begin{cases} u \in L_{loc}^\infty(\tau, +\infty; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(\tau, +\infty; H^1(\Omega)) \\ \delta \in L_{loc}^\infty(\tau, +\infty; H^{1/2}(\Gamma)) \cap L^\infty(\tau, +\infty; L^2(\Gamma)) \\ u_t \in L_{loc}^\infty(\tau, +\infty; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(\tau, +\infty; L^2(\Omega)) \cap L^1(\tau, +\infty; H^1(\Omega)) \\ \delta_t \in L_{loc}^\infty(\tau, +\infty; H^{1/2}(\Gamma)) \cap L^\infty(\tau, +\infty; L^2(\Gamma)) \cap L^1(\tau, +\infty; L^2(\Gamma)) \\ u_{tt} \in L_{loc}^\infty(\tau, +\infty; L^2(\Omega)) \cap L^1(\tau, +\infty; L^2(\Omega)) \\ \delta_{tt} \in L_{loc}^\infty(\tau, +\infty; L^2(\Gamma)) \cap L^1(\tau, +\infty; L^2(\Gamma)), \end{cases}$$

o que prova (6.64). \square

6.2 Existência de Atrator Pullback

Nesta seção, investigamos o comportamento assintótico do sistema (6.2)–(6.6) no contexto não autônomo, com o objetivo central de estabelecer a existência de um atrator pullback. Para alcançar esse resultado, seguimos uma estratégia em várias etapas interligadas.

Primeiramente, reescrevemos o sistema ampliado (6.12)–(6.17) como um problema de Cauchy não autônomo (3.9), no qual o sistema é descrito por uma equação diferencial em espaços de Hilbert com operador dependente do tempo. Em seguida, introduzimos a formulação precisa do processo de evolução associado, representado por $\{\mathcal{P}(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$. Esse processo é construído a partir do sistema CD de Kato associado à família de operadores lineares $\{\mathcal{A}(t)\}_{t \geq \tau}$ e incorpora, de maneira explícita, os termos não lineares e as forças externas dependentes do tempo. Tal construção garante a existência e unicidade de soluções brandas globais no espaço de energia natural, fornecendo a base para o estudo das propriedades assintóticas.

Com esse arcabouço, passamos à análise de energia. Derivamos estimativas que permitem controlar a norma das soluções em função do tempo e da força externa, o que conduz à identificação de famílias de conjuntos absorventes para o processo $\{\mathcal{P}(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$. Por fim, introduzimos o universo \mathcal{D} de subconjuntos de \mathcal{H} , adequado ao estudo de atração pullback, e estabelecemos condições sob as quais o processo é \mathcal{D} -pullback assintoticamente compacto. Esse resultado, aliado à existência de conjuntos absorventes, nos permite demonstrar, ao final, a existência de um atrator pullback para o sistema, o qual descreve a dinâmica assintótica dependente do tempo.

6.2.1 Formulação do Processo de Evolução

O sistema (6.12)–(6.17) é equivalente ao seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} U_t(t) = \widetilde{\mathcal{F}}(U(t), t); & t > \tau \\ U(\tau) = U_\tau \end{cases}, \quad (6.105)$$

onde $\widetilde{\mathcal{F}} := (\mathcal{A}(t) - \mathcal{F}(t, U(t)) + \mathcal{G}(t)) : [\tau, +\infty) \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é a aplicação definida por:

$$\widetilde{\mathcal{F}}(U, t) = \begin{pmatrix} v \\ z \\ \Delta u - u - f(u) - c(t)g(v) + h(t) \\ -\delta - \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} p(y)\varphi(y)dy - v|_{\Gamma} \\ -(y^2 + \eta)\varphi(y) + p(y)z, \end{pmatrix}, \quad (6.106)$$

onde, para cada $t \geq \tau$, $\mathcal{A}(t) : D \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o operador linear, definido em (6.20), com domínio D dado em (6.22); $\mathcal{F} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ e $\mathcal{G} : [\tau, +\infty) \rightarrow \mathcal{H}$ são as aplicações definidas em (6.21); $U = (u, \delta, v, z, \varphi)$; e $U_\tau = (u_\tau^0, \delta_\tau^0, u_\tau^1, \delta_\tau^1, 0)$.

O Teorema 6.5 e a estimativa (6.71) garantem, para cada $U_\tau \in \mathcal{H}$, que o problema (6.19), e portanto, o problema (6.105), admite uma única solução branda $U \in C^0([\tau, +\infty); \mathcal{H})$ dada por:

$$U(t) = P(t, \tau)U_\tau + \int_\tau^t P(t, s)[\mathcal{G}(s) - \mathcal{F}(s, U(s))] ds,$$

onde $\{P(t, s)\}_{t \geq s}$ é o processo de evolução gerado pelo sistema CD de Kato ($\{\mathcal{A}(t)\}_{t \geq \tau}, \mathcal{H}, D$).

Defina o processo de evolução (do sistema completo) de $\{\mathcal{P}(t)\}_{t \geq 0}$ pondo:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t, \tau) : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ U_\tau &\longmapsto U(t) = P(t, \tau)U_\tau + \int_\tau^t P(t, s)[\mathcal{G}(s) - \mathcal{F}(s, U(s))] ds. \end{aligned} \quad (6.107)$$

Então $U \in C^0([\tau, +\infty); \mathcal{H})$ tal que

$$U(t) = \mathcal{P}(t, \tau)U_\tau = P(t, \tau)U_\tau + \int_\tau^t P(t, s)[\mathcal{G}(s) - \mathcal{F}(s, U(s))] ds,$$

é a única solução branda do problema (6.105).

6.2.2 Existência de Atrator Pullback

Apresentaremos alguns lemas técnicos que serão utilizados para o obter uma família de conjuntos pullback absorvente em um conveniente universo de atração \mathcal{D} (ver Definição 3.53), sob a ação do processo $\{\mathcal{P}(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$.

Lema 6.8

Seja $E(t)$ a energia do sistema associada ao problema (6.12)-(6.17) dada por (6.55). Então existem constantes β_0, C_f e C_F tais que:

$$\beta_0 \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 - C_f \leq E(t) \leq C_F \left(1 + \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^{\rho+1}\right); \quad \forall t \geq \tau, \quad (6.108)$$

onde $U(t) = (u, \delta, u_t, \delta_t, \varphi, \phi) \in \mathcal{H}$.

Demonstração. Observe que da estimativa (6.68), temos que:

$$-\frac{\beta}{2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 - m_f \cdot med(\Omega) \leq \int_\Omega F(u(x)) dx \leq \widetilde{C}_1 \left(med(\Omega) + \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\rho+1} \right),$$

onde $F(u) = \int_\tau^u f(s) ds$.

Então

$$\begin{aligned} E(t) = \frac{1}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_\Omega F(u(t)) dx &\geq \frac{1}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{\beta}{2} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 - m_f \cdot med(\Omega) \\ &= \beta_0 \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 - C_f, \end{aligned}$$

onde $\beta_0 = \frac{1-\beta}{2}$ e $C_f = m_f \cdot med(\Omega)$.

Agora, note que, $\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 1 + \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^{\rho+1}$. De fato, se $\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq 1$, temos $\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 1 \leq 1 + \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^{\rho+1}$; e caso $\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \geq 1$, tem-se $\|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^{\rho+1} \leq 1 + \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^{\rho+1}$, uma vez que $\rho + 1 \geq 2$. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} E(t) = \frac{1}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_{\Omega} F(u(t)) \, dx &\leq \frac{1}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \widetilde{C}_1 \text{med}(\Omega) + \widetilde{C}_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\rho+1} \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^{\rho+1} + \widetilde{C}_1 \text{med}(\Omega) + \widetilde{C}_1 \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^{\rho+1} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \widetilde{C}_1 \text{med}(\Omega) \right) + \left(\frac{1}{2} + \widetilde{C}_1 \right) \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^{\rho+1} \\ &\leq C_F \left(1 + \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^{\rho+1} \right), \end{aligned}$$

onde $C_F = \max\{(1 + 2\widetilde{C}_1 \text{med}(\Omega))/2, (1 + 2\widetilde{C}_1)/2\}$. \square

Lema 6.9

Seja $E(t)$ a energia do sistema associada ao problema (6.12)-(6.17) dada por (6.55). Então existem constantes positivas σ_1 e $m_0 > 0$, tais que:

$$E(t) \leq 3E(\tau) e^{-\sigma_1(t-\tau)} + 2m_0 \int_{\tau}^t e^{-\sigma_1(t-s)} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds + 6C_F; \quad \forall t \geq \tau. \quad (6.109)$$

Demonação. Do Teorema de Traço existe uma constante $C_0 > 0$ tal que $\|u(t)|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_0 \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}$. Então

$$\int_{\Gamma} u(t)|_{\Gamma} \delta(t) \, d\Gamma \leq \|u(t)|_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)} \|\delta(t)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_0 \|u(t)\|_{H^1(\Omega)} \|\delta(t)\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, defina a *Energia Perturbada*:

$$E_{\varepsilon}(t) := E(t) + \varepsilon \Phi(t), \quad (6.110)$$

com

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \langle u(t), u_t(t) \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \delta(t), \delta_t(t) \rangle_{L^2(\Gamma)} + \langle u(t)|_{\Gamma}, \delta(t) \rangle_{L^2(\Gamma)} \\ &\quad + \frac{\gamma(t)}{2} \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 - \beta_1 \int_{\tau}^t \|\delta_t(s)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \, ds, \end{aligned} \quad (6.111)$$

onde $\beta_1 := \frac{2(1-\beta) + 4(C_0)^2}{1-\beta}$. Portanto:

$$\begin{aligned} |\Phi(t)| &\leq \left| \int_{\Omega} u(t) u_t(t) \, dx + \int_{\Gamma} \delta(t) \delta_t(t) \, d\Gamma + \int_{\Gamma} u(t)|_{\Gamma} \delta(t) \, d\Gamma + \frac{\gamma(t)}{2} \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\delta(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2} \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{(C_0)^2}{2} \|\delta(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\gamma(t)}{2} \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \\ &\leq C_1 \|U(t)\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned} \quad (6.112)$$

onde $C_1 = \max\{[1 + (C_0)^2]/2, \gamma(\tau)/2\}$.

Da estimativa (6.112) e do Lema 6.8, obtemos:

$$|\Phi(t)| \leq \frac{C_1}{\beta_0} (E(t) + C_f),$$

e escolhendo $\varepsilon_0 = \frac{\beta_0}{2C_1}$, temos que:

$$\varepsilon |\Phi(t)| \leq \varepsilon_0 |\Phi(t)| \leq \varepsilon_0 \frac{C_1}{\beta_0} (E(t) + C_f) = \frac{1}{2} (E(t) + C_f); \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Consequentemente

$$-\frac{1}{2} E(t) - \frac{1}{2} C_f \leq \varepsilon |\Phi(t)| \leq \frac{1}{2} E(t) + \frac{1}{2} C_f,$$

e portanto:

$$\frac{1}{2} E(t) - \frac{1}{2} C_f \leq E_\varepsilon(t) \leq \frac{3}{2} E(t) + \frac{1}{2} C_f; \forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \quad (6.113)$$

Por outro lado, das Equações (6.12), (6.13), (6.14) e (6.15), obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \langle u(t), u_{tt}(t) \rangle_{L^2(\Omega)} + \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \langle \delta(t), \delta_{tt}(t) \rangle_{L^2(\Gamma)} + \langle u_t(t)|_\Gamma, \delta(t) \rangle_{L^2(\Gamma)} \\ &\quad + \langle u(t)|_\Gamma, \delta_t(t) \rangle_{L^2(\Gamma)} + \gamma(t) \langle \varphi(t), \varphi_t(t) \rangle_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))} + \frac{\gamma'(t)}{2} \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 - \beta_1 \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &= \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \langle u(t), \Delta u(t) - u(t) - f(u(t)) - c(t)g(u_t(t)) + h(t) \rangle_{L^2(\Omega)} + \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\quad + \left\langle \delta(t), -\delta(t) - \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} p(y) \varphi(t, y) dy - u_t(t)|_\Gamma \right\rangle_{L^2(\Gamma)} + \langle u_t(t)|_\Gamma, \delta(t) \rangle_{L^2(\Gamma)} \\ &\quad + \langle u(t)|_\Gamma, \delta_t(t) \rangle_{L^2(\Gamma)} + \gamma(t) \langle \varphi(t), -(y^2 + \eta) \varphi(t) + p(y) \delta_t(t) \rangle_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))} \\ &\quad + \frac{\gamma'(t)}{2} \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 - \beta_1 \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &= \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} f(u(t)) u(t) dx - c(t) \int_{\Omega} g(u_t(t)) u(t) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} h(t) u(t) dx + (1 - \beta_1) \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \|\delta(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \varphi(t, y) \delta(t) d\Gamma dy \\ &\quad + 2 \int_{\Gamma} u(t)|_\Gamma \delta_t(t) d\Gamma - \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy + \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \varphi(t, y) \delta_t(t) d\Gamma dy \\ &\quad + \frac{\gamma'(t)}{2} \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2, \end{aligned}$$

e como

$$\begin{aligned} \frac{\gamma'(t)}{2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 - \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy &\leq \frac{\gamma(t)}{2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 - \gamma(t) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \\ &= -\frac{\gamma(t)}{2} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2, \end{aligned}$$

temos que:

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &\leq \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 - \int_{\Omega} f(u(t)) u(t) dx - c(t) \int_{\Omega} g(u_t(t)) u(t) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} h(t) u(t) dx + (1 - \beta_1) \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \|\delta(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \varphi(t, y) \delta(t) d\Gamma dy \\ &\quad + 2 \int_{\Gamma} u(t)|_\Gamma \delta_t(t) d\Gamma + \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \varphi(t, y) \delta_t(t) d\Gamma dy - \frac{\gamma(t)}{2} \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2. \quad (6.114) \end{aligned}$$

Agora, observe que, das hipóteses (6.9) e (6.10) obtemos:

$$\int_{\Omega} [F(u(t)) - f(u(t))u(t)] dx \leq \int_{\Omega} \left(\frac{\beta}{2} |u(t)|^2 + m_f \right) dx = \frac{\beta}{2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_f \quad (6.115)$$

e

$$-c(t) \int_{\Omega} g(u_t(t))u(t) dx \leq -mc_0 \int_{\Omega} u_t(t)u(t) dx \leq \frac{1-\beta}{8} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{2(mc_0)^2}{1-\beta} \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (6.116)$$

Além disso

$$\int_{\Omega} h(t)u(t) dx \leq \frac{1-\beta}{8} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{2}{1-\beta} \|h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (6.117)$$

e

$$2 \int_{\Gamma} u(t)|_{\Gamma} \delta_t(t) d\Gamma \leq 2C_0 \|u(t)\|_{H^1(\Omega)} \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)} \leq \frac{1-\beta}{4} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{4(C_0)^2}{1-\beta} \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2. \quad (6.118)$$

$$- \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \varphi(t, y) \delta(t) d\Gamma dy \leq \frac{[C(\alpha, \eta, 0)]^2}{2} \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy + \frac{1}{2} \|\delta(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad (6.119)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \varphi(t, y) \delta_t(t) d\Gamma dy \leq \frac{[C(\alpha, \eta, 0)]^2}{2} \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy + \frac{1}{2} \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2, \quad (6.120)$$

Então, inserindo $E(t)$ em (6.114) e utilizando as estimativas (6.115)–(6.120), obtemos:

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &\leq -E(t) - \frac{1}{2} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\delta(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{3}{2} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{3}{2} - \beta_1 \right) \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\quad + \int_{\Omega} [F(u(t)) - f(u(t))u(t)] dx - c(t) \int_{\Omega} g(u_t(t))u(t) dx + \int_{\Omega} h(t)u(t) dx \\ &\quad + 2 \int_{\Gamma} u(t)|_{\Gamma} \delta_t(t) d\Gamma - \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \varphi(t, y) \delta(t) dy d\Gamma + \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \varphi(t, y) \delta_t(t) dy d\Gamma \\ &\leq -E(t) - \frac{1}{2} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\delta(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{3}{2} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{3}{2} - \beta_1 \right) \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\beta}{2} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\quad + C_f + \frac{1-\beta}{8} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{2(mc_0)^2}{1-\beta} \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1-\beta}{8} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{2}{1-\beta} \|h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{1-\beta}{4} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{4(C_0)^2}{1-\beta} \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{[C(\alpha, \eta, 0)]^2}{2} \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\delta(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{[C(\alpha, \eta, 0)]^2}{2} \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy + \frac{1}{2} \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &\leq -E(t) + \left(-\frac{1-\beta}{2} + \frac{1-\beta}{2} \right) \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \|\delta(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{2(mc_0)^2}{1-\beta} \right) \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + (\beta_1 - \beta_1) \|\delta_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + [C(\alpha, \eta, 0)]^2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy + \frac{2}{1-\beta} \|h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_f \\ &= -E(t) + \left(\frac{3}{2} + \frac{2(mc_0)^2}{1-\beta} \right) \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + (C_{\alpha, \eta})^2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy + \frac{2}{1-\beta} \|h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + C_f, \end{aligned} \quad (6.121)$$

onde $C_{\alpha,\eta} := C(\alpha, \eta, 0)$ (vide Lemma 4.5).

Por outro, de (6.56), e da desigualdade de Young, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &\leq -mc_0\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 - \gamma_0 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy + \langle h(t), u_t(t) \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &\leq -\frac{mc_0}{2}\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 - \gamma_0 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy + \frac{1}{2mc_0}\|h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (6.122)$$

Agora, escolha

$$\varepsilon = \min \left\{ \varepsilon_0, \frac{mc_0}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{2(mc_0)^2}{1-\beta} \right)^{-1}, \gamma_0 (C_{\alpha,\eta})^{-2}, 1 \right\}. \quad (6.123)$$

Note que $\varepsilon \leq \varepsilon_0 = \frac{\beta_0}{2C_1} < \beta_0 = \frac{1-\beta}{2}$. Assim, das estimativas (6.121) e (6.122), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_{\varepsilon}(t) &= \frac{d}{dt}E(t) + \varepsilon\Phi'(t) \\ &\leq -\frac{mc_0}{2}\|u_t(t)\|^2 - \gamma_0 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy + \frac{1}{2mc_0}\|h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \varepsilon E(t) \\ &\quad + \varepsilon \left(\frac{3}{2} + \frac{2(mc_0)^2}{1-\beta} \right) \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon (C_{\alpha,\eta})^2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy \\ &\quad + \frac{2\varepsilon}{1-\beta} \|h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon C_f \\ &\leq \left(-\frac{mc_0}{2} + \frac{mc_0}{2} \right) \|u_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 (-\gamma_0 + \gamma_0) \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\varphi(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy - \varepsilon E(t) \\ &\quad + \left(1 + \frac{1}{2mc_0} \right) \|h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon C_f \\ &= -\varepsilon E(t) + m_0\|h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon C_f \end{aligned} \quad (6.124)$$

onde $m_0 = 1 + \frac{1}{2mc_0}$.

Como $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, aplicando a desigualdade (6.113) na estimativa (6.124), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_{\varepsilon}(t) &\leq -\frac{2\varepsilon}{3}E_{\varepsilon}(t) + \frac{\varepsilon}{3}C_f + m_0\|h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon C_f \\ &= -\frac{2\varepsilon}{3}E_{\varepsilon}(t) + m_0\|h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{4\varepsilon}{3}C_f, \end{aligned}$$

e pela versão diferencial do Lema de Gronwall (Proposição A.6), segue que:

$$\begin{aligned} E_{\varepsilon}(t) &\leq E_{\varepsilon}(\tau)e^{-\frac{2\varepsilon}{3}(t-\tau)} + m_0 \int_{\tau}^t e^{-\frac{2\varepsilon}{3}(t-s)} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{4\varepsilon}{3}C_f \int_{\tau}^t e^{-\frac{2\varepsilon}{3}(t-s)} ds \\ &\leq E_{\varepsilon}(\tau)e^{-\sigma_1(t-\tau)} + m_0 \int_{\tau}^t e^{-\sigma_1(t-s)} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + 2C_f, \end{aligned} \quad (6.125)$$

onde $\sigma_1 = -\frac{2\varepsilon}{3}$.

Finalmente, da desigualdade (6.113) e da estimativa (6.125), segue que:

$$\begin{aligned}
 E(t) &\leq 2E_\varepsilon(t) + C_f \\
 &\leq 2E_\varepsilon(\tau)e^{-\sigma_1(t-\tau)} + 2m_0 \int_\tau^t e^{-\sigma_1(t-s)} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + 5C_f \\
 &\leq (3E(\tau) + C_f)e^{-\sigma_1(t-\tau)} + 2m_0 \int_\tau^t e^{-\sigma_1(t-s)} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + 5C_f \\
 &\leq 3E(\tau)e^{-\sigma_1(t-\tau)} + 2m_0 \int_\tau^t e^{-\sigma_1(t-s)} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + 6C_f
 \end{aligned}$$

□

A seguir, definiremos um universo de atração conveniente para o estudo da dinâmica pullback do processo evolutivo associado ao nosso problema.

Definição 6.10

Seja $\sigma_1 > 0$ a constante positiva obtida no Lema 6.9 e seja

$$R_0 = \left\{ r : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty); \lim_{\tau \rightarrow -\infty} e^{\sigma_1 \tau} [r(\tau)]^{\rho+1} = 0 \right\}. \quad (6.126)$$

Definimos a seguinte família de subconjuntos limitados de \mathcal{H} por:

$$\hat{D} = \left\{ D(t); D(t) \subset \overline{B}_{r(t)}(0), r \in R_0 \text{ e } D(t) \neq 0 \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \right\}, \quad (6.127)$$

onde $\overline{B}_{r(t)}(0)$ é a bola fechada (com respeito a norma de \mathcal{H}) centrada na origem e raio $r(t)$.

A coleção de todas as famílias da forma (6.127) define um universo \mathcal{D} de subconjuntos de \mathcal{H} (ver Definição 3.52).

Proposição 6.11

Se $\sigma_0 \leq \sigma_1$, então o processo de evolução $\{\mathcal{P}(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ definido em (6.107) tem uma família de conjuntos \mathcal{D} -pullback absorvente (ver Definição 3.53), denotada por \widehat{B}_0 . Mais precisamente, a família \widehat{B}_0 é dada por bolas fechadas $\overline{B}_{r_0(t)}(0)$, onde

$$r_0(t) = \sqrt{2m_0 \int_{-\infty}^t e^{-\sigma_0(t-s)} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + 6C_f + 1}; \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (6.128)$$

Além disso, se $\sigma_0 < \frac{\sigma_1}{2}$, então $\widehat{B}_0 \in \mathcal{D}$, ou seja, a família \widehat{B}_0 pertence ao universo \mathcal{D} .

Demonstração. Seja \hat{D} uma família arbitrária no universo \mathcal{D} . Então para qualquer par $\tau \leq t$ e qualquer $U_\tau \in D(\tau) \subset \overline{B}_{r(\tau)}(0)$, dos Lemas 6.8 e 6.9, e da Definição 6.10 segue que:

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{P}(t, \tau)U_\tau\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq E(t) \\
 &\leq 3E(\tau)e^{-\sigma_1(t-\tau)} + 2m_0 \int_\tau^t e^{-\sigma_1(t-s)} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + 6C_f \\
 &\leq 3C_F \left(1 + \|U_\tau\|_{\mathcal{H}}^{\rho+1}\right) e^{-\sigma_1(t-\tau)} + 2m_0 \int_\tau^t e^{-\sigma_1(t-s)} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + 6C_f \\
 &\leq 3C_F \left(1 + [r(\tau)]^{\rho+1}\right) e^{-\sigma_1(t-\tau)} + 2m_0 \int_\tau^t e^{-\sigma_1(t-s)} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + 6C_f. \quad (6.129)
 \end{aligned}$$

Se $\sigma_0 \leq \sigma_1$, temos que:

$$\int_{\tau}^t e^{-\sigma_1(t-s)} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \int_{\tau}^t e^{-\sigma_0(t-s)} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Tomando $r_0(t)$ por (6.128), de (6.129), segue que:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}(t, \tau)U_{\tau}\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq 3C_F(1 + [r(\tau)]^{\rho+1})e^{-\sigma_1(t-\tau)} + 2m_0 \int_{\tau}^t e^{-\sigma_0(t-s)} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + 6C_f \\ &\leq 3C_F(1 + [r(\tau)]^{\rho+1})e^{-\sigma_0(t-\tau)} + 2m_0 \int_{-\infty}^t e^{-\sigma_1(t-s)} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + 6C_f \\ &\leq 3C_F(1 + [r(\tau)]^{\rho+1})e^{-\sigma_1(t-\tau)} + [r_0(t)]^2 - 1, \end{aligned} \quad (6.130)$$

e como $r(t) \in R_0$ (onde R_0 é o conjunto definido em (6.126)), temos que

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} 3C_F(1 + [r(\tau)]^{\rho+1})e^{-\sigma_1(t-\tau)} = 0,$$

e portanto existe $T = T(t, \hat{D}) \leq t$ tal que

$$3C_F(1 + [r(\tau)]^{\rho+1})e^{-\sigma_1(t-\tau)} < 1; \forall \tau < T. \quad (6.131)$$

De (6.130) e (6.131), segue que:

$$\mathcal{P}(t, \tau)D(\tau) \subset B_0(t); \forall \tau < T,$$

onde $B_0(t) := \overline{B}_{r_0(t)}(0)$.

Isso mostra que a coleção \widehat{B}_0 formada pelas bolas fechadas $\overline{B}_{r_0(t)}(0)$ é uma família \mathcal{D} -pullback absorvente. Afirmamos que $\widehat{B}_0 \in \mathcal{D}$. De fato. De (6.128), segue que:

$$[r_0(\tau)]^2 e^{\frac{\sigma_1}{2}\tau} = 2m_0 e^{-(\sigma_0 - \frac{\sigma_1}{2})\tau} \int_{-\infty}^{\tau} e^{\sigma_0 s} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + (6C_f + 1)e^{\frac{\sigma_1}{2}\tau}.$$

Como $\int_{-\infty}^{\tau} e^{\sigma_0 s} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds$ decresce quando $\tau \rightarrow -\infty$, e $\frac{\sigma_1}{2} - \sigma_0 > 0$, temos que $[r_0(\tau)]^2 e^{\frac{\sigma_1}{2}\tau} \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow \infty$, e portanto, $r_0 \in R_0$ (ver conjunto definido em (6.126)). Logo $\widehat{B}_0 \in \mathcal{D}$. \square

Agora apresentaremos um lemma técnico que será utilizado para mostrar que o processo $\{\mathcal{P}(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ é \mathcal{D} -pullback assintoticamente compacto (ver Definição 3.57).

Lema 6.12

Seja $\{\mathcal{P}(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ o processo de evolução definido em (6.107). Dados $U_{\tau}^1, U_{\tau}^2 \in \mathcal{H}$, existe $\sigma_2 > \sigma_1$, tal que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}(t, \tau)U_{\tau}^1 - \mathcal{P}(t, \tau)U_{\tau}^2\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq 3\|U_{\tau}^1 - U_{\tau}^2\|_{\mathcal{H}}^2 e^{-\sigma_2(t-\tau)} + C_{t, \tau} \int_{\tau}^t \|u^1(s) - u^2(s)\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^2 ds \\ &\quad + 4 \int_{\tau}^t \int_{\Omega} [f(u^2(s)) - f(u^1(s))] \left((u^1)_t(t) - (u^2)_t(s) \right) dx ds, \end{aligned} \quad (6.132)$$

onde $U^j(t) := \mathcal{P}(t, \tau)U_{\tau}^j = (u^j(t), \delta^j(t), v^j(t), z^j(t), \varphi^j(t))$ ($j = 1, 2$), $C_{t, \tau} = 4 \sup_{s \in [\tau, t]} k(\tau, s)$ e $k(\tau, t) = \tilde{C} \left(1 + \|U^1(t)\|_{\mathcal{H}}^{\rho-1} + \|U^2(t)\|_{\mathcal{H}}^{\rho-1} \right)$.

Demonstração. Sejam $U_\tau^1, U_\tau^1 \in \mathcal{H}$; $U_\tau^1 = (u_\tau^1, \delta_\tau^1, v_\tau^1, z_\tau^1, 0)$ e $U_\tau^2 = (u_\tau^2, \delta_\tau^2, v_\tau^2, z_\tau^2, 0)$. Considere as soluções brandas $U^1 : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{H}$ e $U^2 : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{H}$; $U^1(t) = (u^1(t), \delta^1(t), (u^1)_t(t), (\delta^1)_t(t), \varphi^1(t))$ e $U^2(t) = (u^2(t), \delta^2(t), (u^2)_t(t), (\delta^2)_t(t), \varphi^2(t))$ do problema de Cauchy (6.19) para os dados iniciais U_τ^1 e U_τ^2 respectivamente.

Observe que, $W = U^1 - U^2 = (w, \chi, w_t, \chi_t, \tilde{\varphi})$ é solução branda do seguinte problema:

$$w_{tt}(x, t) - \Delta w(x, t) + w(x, t) + f(u^1(x, t)) - f(u^2(x, t)) + c(t)g(w_t(x, t)) = 0, \quad (6.133)$$

$$\chi_{tt}(\xi, t) + \chi(\xi, t) + \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} p(y) \tilde{\varphi}(\xi, t, y) dy = -(w_t)_{|\Gamma}(\xi, t), \quad (6.134)$$

$$\tilde{\varphi}_t(\xi, t, y) + (y^2 + \eta) \tilde{\varphi}(\xi, t, y) - p(y) \chi_t(\xi, t) = 0, \quad (6.135)$$

$$\chi_t(\xi, t) = \frac{\partial w}{\partial \nu}(\xi, t), \quad (6.136)$$

$$w(x, \tau) = u_\tau^1(x) - u_\tau^2(x) \text{ e } w_t(x, \tau) = v_\tau^1(x) - v_\tau^2(x), \quad (6.137)$$

$$\chi(\xi, \tau) = \delta_\tau^1(\xi) - \delta_\tau^2(\xi), \quad \chi_t(\xi, \tau) = z_\tau^1(\xi) - z_\tau^2(\xi) \text{ e } \tilde{\varphi}(\xi, \tau, y) = 0, \quad (6.138)$$

onde $t > \tau$, $x \in \Omega$, $\xi \in \Gamma$ e $y \in \mathbb{R}$.

Multiplicando o sistema (6.133)–(6.135) pelas funções w_t , χ_t e $\tilde{\varphi}$ respectivamente, procedendo de forma similar a demonstração da Proposição 6.6, e utilizando as condição de fronteira (6.136), obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\chi(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\chi_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{d}{dt} \frac{\gamma(t)}{2} \|\tilde{\varphi}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \\ &= \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w_t(t) dx - c(t) \langle g(w_t(t)), w_t(t) \rangle_{L^2(\Omega)} - \gamma(t) + \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\tilde{\varphi}(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy \\ & \quad + \frac{\gamma'(t)}{2} \|\tilde{\varphi}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2. \end{aligned} \quad (6.139)$$

Defina o funcional energia do problema (6.133)–(6.138):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \frac{1}{2} \|W(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2} \|w(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\chi(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2} \|w_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\chi_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ & \quad + \frac{\gamma(t)}{2} \|\tilde{\varphi}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2. \end{aligned} \quad (6.140)$$

Assim de (6.139) e (6.140), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) &\leq -mc_0 \|w_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \gamma(t) + \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\tilde{\varphi}(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy \\ & \quad + \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w_t(t) dx \end{aligned} \quad (6.141)$$

Dado $\tilde{\varepsilon} > 0$, defina a *Energia Pertubada*:

$$\mathcal{E}_{\tilde{\varepsilon}}(t) := \mathcal{E}(t) + \tilde{\varepsilon} \Psi(t), \quad (6.142)$$

com

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \langle w(t), w_t(t) \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \chi(t), \chi_t(t) \rangle_{L^2(\Gamma)} + \langle w(t)_{|\Gamma}, \chi(t) \rangle_{L^2(\Gamma)} \\ & \quad + \frac{\gamma(t)}{2} \|\tilde{\varphi}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 - \beta_2 \int_{\tau}^t \|\chi_t(s)\|_{L^2(\Gamma)}^2 ds, \end{aligned} \quad (6.143)$$

onde $\beta_2 := 2 + (C_0)^2$.

Note que

$$\begin{aligned} |\Psi(t)| &\leq \left| \int_{\Omega} w(t) w_t(t) dx + \int_{\Gamma} \chi(t) \delta_t(t) d\Gamma + \int_{\Gamma} w(t)|_{\Gamma} \chi(t) d\Gamma + \frac{\gamma(t)}{2} \|\tilde{\varphi}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|w_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\chi(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2} \|\chi_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{1}{2} \|w(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{(C_0)^2}{2} \|\chi(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{\gamma(t)}{2} \|\tilde{\varphi}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 \\ &\leq \frac{C_1}{2} \|W(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = C_1 \mathcal{E}(t), \end{aligned}$$

onde $C_1 = \max\{1 + (C_0)^2, \gamma(\tau)\}$.

Logo

$$-C_1 \mathcal{E}(t) \leq \Psi(t) \leq C_1 \mathcal{E}(t); \quad \forall t \geq \tau. \quad (6.144)$$

Assim, se $\tilde{\varepsilon} \leq \tilde{\varepsilon}_0 := \frac{1}{2C_1}$, então de (6.144), segue que:

$$\mathcal{E}_{\tilde{\varepsilon}}(t) = \mathcal{E}(t) + \tilde{\varepsilon} \Psi(t) \leq \mathcal{E}(t) + \tilde{\varepsilon}_0 \Psi(t) \leq \mathcal{E}(t) + \tilde{\varepsilon}_0 C_1 \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t) + \frac{1}{2} \mathcal{E}(t) = \frac{3}{2} \mathcal{E}(t)$$

e

$$\mathcal{E}_{\tilde{\varepsilon}}(t) = \mathcal{E}(t) + \tilde{\varepsilon} \Psi(t) \geq \mathcal{E}(t) - \tilde{\varepsilon} C_1 \mathcal{E}(t) \geq \mathcal{E}(t) - \tilde{\varepsilon}_0 C_1 \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t) - \frac{1}{2} \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(t).$$

Em resumo, para todo $t \geq \tau$, tem-se

$$\frac{1}{2} \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}_{\tilde{\varepsilon}}(t) \leq \frac{3}{2} \mathcal{E}(t), \quad \text{sempre que } 0 < \tilde{\varepsilon} \leq \tilde{\varepsilon}_0. \quad (6.145)$$

Por outro lado, das Equações (6.133)–(6.136), obtemos:

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= \|w_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \langle w(t), w_{tt}(t) \rangle_{L^2(\Omega)} + \|\chi_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \langle \chi(t), \chi_{tt}(t) \rangle_{L^2(\Gamma)} + \langle w_t(t)|_{\Gamma}, \chi(t) \rangle_{L^2(\Gamma)} \\ &\quad + \langle w(t)|_{\Gamma}, \chi_t(t) \rangle_{L^2(\Gamma)} + \gamma(t) \langle \tilde{\varphi}(t), \tilde{\varphi}_t(t) \rangle_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))} + \frac{\gamma'(t)}{2} \|\tilde{\varphi}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 - \beta_2 \|\chi_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &= \|w_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \langle w(t), \Delta w(t) - w(t) + f(u^2(t)) - f(u^1(t)) - c(t)g(w_t(t)) \rangle_{L^2(\Omega)} + \|\chi_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\quad + \left\langle \chi(t), -\chi(t) - \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} p(y) \tilde{\varphi}(t, y) dy - w_t(t)|_{\Gamma} \right\rangle_{L^2(\Gamma)} + \langle w_t(t)|_{\Gamma}, \chi(t) \rangle_{L^2(\Gamma)} \\ &\quad + \langle w(t)|_{\Gamma}, \chi_t(t) \rangle_{L^2(\Gamma)} + \gamma(t) \langle \tilde{\varphi}(t), -(y^2 + \eta) \tilde{\varphi}(t) + p(y) \chi_t(t) \rangle_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Omega))} \\ &\quad + \frac{\gamma'(t)}{2} \|\tilde{\varphi}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2 - \beta_2 \|\chi_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &= \|w_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|w(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w(t) dx - c(t) \int_{\Omega} g(w_t(t)) w(t) dx \\ &\quad + (1 - \beta_2) \|\chi_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \|\chi(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \tilde{\varphi}(t, y) \chi(t) d\Gamma dy \\ &\quad + 2 \int_{\Gamma} w(t)|_{\Gamma} \chi_t(t) d\Gamma - \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\tilde{\varphi}(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy + \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \tilde{\varphi}(t, y) \chi_t(t) d\Gamma dy \\ &\quad + \frac{\gamma'(t)}{2} \|\tilde{\varphi}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2. \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &\leq \|w_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|w(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w(t) dx - c(t) \int_{\Omega} g(w_t(t)) w(t) dx \\ &\quad + (1 - \beta_2) \|\chi_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \|\chi(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \tilde{\varphi}(t, y) \chi(t) d\Gamma dy \\ &\quad + 2 \int_{\Gamma} w(t)|_{\Gamma} \chi_t(t) d\Gamma + \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \tilde{\varphi}(t, y) \chi_t(t) d\Gamma dy - \frac{\gamma(t)}{2} \|\tilde{\varphi}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}; L^2(\Gamma))}^2. \end{aligned} \quad (6.146)$$

Inserindo $\mathcal{E}(t)$ em (6.146), obtemos:

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &\leq -\mathcal{E}(t) - \frac{1}{2} \|w(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\chi(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{3}{2} \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{3}{2} - \beta_2\right) \|\chi_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\quad + \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w(t) dx - c(t) \int_{\Omega} g(w_t(t)) w(t) dx + 2 \int_{\Gamma} w(t)|_{\Gamma} \chi_t(t) d\Gamma \\ &\quad - \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \tilde{\varphi}(t, y) \chi(t) dy d\Gamma + \gamma(t) \int_{\mathbb{R}} \int_{\Gamma} p(y) \tilde{\varphi}(t, y) \chi_t(t) dy d\Gamma \\ &\leq -\mathcal{E}(t) - \frac{1}{2} \|w(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \|\chi(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{3}{2} \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{3}{2} - \beta_2\right) \|\chi_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\quad + \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w(t) dx + \frac{1}{4} \|w(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + (mc_0)^2 \|w_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + (C_0)^2 \|\chi_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{[C(\alpha, \eta, 0)]^2}{2} \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\tilde{\varphi}(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\chi(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \frac{[C(\alpha, \eta, 0)]^2}{2} \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\tilde{\varphi}(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy + \frac{1}{2} \|\chi_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2, \end{aligned}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &\leq -\mathcal{E}(t) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \|w(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \|\chi(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \left(\frac{3}{2} + (mc_0)^2\right) \|w_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + (\beta_2 - \beta_2) \|\chi_t(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 + [C(\alpha, \eta, 0)]^2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\tilde{\varphi}(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\quad + \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w(t) dx \\ &= -\mathcal{E}(t) + \left(\frac{3}{2} + (mc_0)^2\right) \|w_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + [C(\alpha, \eta, 0)]^2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\tilde{\varphi}(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\quad + \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w(t) dx. \end{aligned} \quad (6.147)$$

Agora, escolha

$$\tilde{\varepsilon} = \min \left\{ \tilde{\varepsilon}_0, mc_0 \left(\frac{3}{2} + (mc_0)^2 \right)^{-1}, \gamma_0 [C(\alpha, \eta, 0)]^{-2}, 1 \right\}. \quad (6.148)$$

Assim, de (6.141) e (6.147), obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\tilde{\varepsilon}}(t) &= \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) + \tilde{\varepsilon} \Psi'(t) \\
&\leq -mc_0 \|w_t(t)\|^2 - \gamma_0 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\tilde{\varphi}(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy + \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w_t(t) dx \\
&\quad - \tilde{\varepsilon} \mathcal{E}(t) + \tilde{\varepsilon} \left(\frac{3}{2} + (mc_0)^2 \right) \|w_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tilde{\varepsilon} [C(\alpha, \eta, 0)]^2 \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\tilde{\varphi}(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy \\
&\quad + \tilde{\varepsilon} \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w(t) dx \\
&\leq (-mc_0 + mc_0) \|w_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 (-\gamma_0 + \gamma_0) \int_{\mathbb{R}} (y^2 + \eta) \|\tilde{\varphi}(t, y)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dy - \tilde{\varepsilon} \mathcal{E}(t) \\
&\quad + \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w_t(t) dx + \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w(t) dx \\
&= -\tilde{\varepsilon} \mathcal{E}(t) + \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w(t) dx + \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w_t(t) dx,
\end{aligned}$$

e como $\tilde{\varepsilon} \leq \tilde{\varepsilon}_0$, aplicando a desigualdade (6.144), obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\tilde{\varepsilon}}(t) &\leq -\frac{2\tilde{\varepsilon}}{3} \mathcal{E}_{\tilde{\varepsilon}}(t) + \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w(t) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w_t(t) dx. \tag{6.149}
\end{aligned}$$

Agora, observe que, do Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in (0, 1)$ tal que

$$f(u^2) - f(u^1) = f'(u^*) (u^2 - u^1) = -f'(u^*) w,$$

onde $u^* = \theta u^1 + (1 - \theta) u^2$. Logo

$$|[f(u^2) - f(u^1)] w| = |f'(u^*)| \cdot |w|^2.$$

Como $0 < \theta < 1$, temos que $|u^*| \leq |u^1| + |u^2|$, e portanto, da hipótese (6.8), obtemos:

$$|[f(u^2) - f(u^1)] w| = |f'(u^*)| \cdot |w|^2 \leq C (1 + (|u^1| + |u^2|)^{\rho-1}) |w|^2. \tag{6.150}$$

Se $N \in \{1, 2\}$, temos que $\rho = 3$, e nesse caso, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega) = L^{\rho+1}(\Omega)$. Além disso,

$$(|u^1| + |u^2|)^2 \leq 2|u^1|^2 + 2|u^2|^2,$$

e portanto, de (6.150) e da Desigualdade de Hölder, segue que:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w(t) dx &\leq C \int_{\Omega} (1 + (|u^1(t)| + |u^2(t)|)^2) |w(t)|^2 dx \\
&\leq C \int_{\Omega} (1 + 2|u^1(t)|^2 + 2|u^2(t)|^2) |w(t)|^2 dx \leq 2C \int_{\Omega} (1 + |u^1(t)|^2 + |u^2(t)|^2) |w(t)|^2 dx \\
&\leq 2C \left(\sqrt{med(\Omega)} + \|u^1(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 + \|u^2(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 \right) \|w(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 \\
&\leq 2C \left(\sqrt{med(\Omega)} + (\tilde{C}_0)^2 \|u^1(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + (\tilde{C}_0)^2 \|u^2(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \|w(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 \\
&\leq \tilde{C} \left(1 + \|u^1(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u^2(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \|w(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 \\
&\leq \tilde{C} \left(1 + \|U^1(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + \|U^2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \right) \|w(t)\|_{L^4(\Omega)}^2, \tag{6.151}
\end{aligned}$$

onde $\tilde{C} = 2C \max\{\sqrt{\text{med}(\Omega)}, (\tilde{C}_0)^2\}$ e \tilde{C}_0 é a constante da imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$.

Para $N \geq 3$, temos que $1 \leq \rho \leq \frac{N}{N-2}$, e portanto $2 < \rho + 1 < 2\rho \leq \frac{2N}{N-2}$. Então, tem-se $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho}(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+1}(\Omega)$ (ver Corolário 1.26). Além disso, observe que, $0 \leq \rho - 1 \leq 2$, se $N = 3$; e $0 \leq \rho - 1 \leq 1$, se $N \geq 4$.

Suponha que $0 \leq \rho - 1 \leq 1$ ($N \geq 3$). Nesse caso, tem-se:

$$(|u^1| + |u^2|)^{\rho-1} \leq |u^1|^{\rho-1} + |u^2|^{\rho-1},$$

uma vez que a função $s \rightarrow s^{\rho-1}$ é côncava (possui derivada segunda negativa) quando $0 < \rho - 1 < 1$ (os casos $\rho - 1 = 0$ e $\rho - 1 = 1$ são triviais).

Portanto, de (6.150) segue que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w(t) dx &\leq C \int_{\Omega} (1 + (|u^1(t)| + |u^2(t)|)^{\rho-1}) |w(t)|^2 dx \\ &\leq C' \int_{\Omega} (1 + |u^1(t)|^{\rho-1} + |u^2(t)|^{\rho-1}) |w(t)|^2 dx, \end{aligned}$$

onde $C' = C$.

Agora, se $1 < \rho - 1 < 2$ ($N = 3$), temos:

$$(|u^1| + |u^2|)^{\rho-1} \leq 2^{\rho-2} (|u^1|^{\rho-1} + |u^2|^{\rho-1}),$$

uma vez que a função $s \rightarrow s^{\rho-1}$ é convexa (possui derivada segunda positiva).

Como $2^{\rho-2} > 1$, de (6.150) segue que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w(t) dx &\leq C \int_{\Omega} (1 + (|u^1(t)| + |u^2(t)|)^{\rho-1}) |w(t)|^2 dx \\ &\leq C \int_{\Omega} (1 + 2^{\rho-1} |u^1(t)|^{\rho-1} + 2^{\rho-2} |u^2(t)|^{\rho-1}) |w(t)|^2 dx \\ &\leq C' \int_{\Omega} (1 + |u^1(t)|^{\rho-1} + |u^2(t)|^{\rho-1}) |w(t)|^2 dx, \end{aligned}$$

onde $C' = 2^{\rho-2} C$.

Portanto, para $N \geq 3$, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w(t) dx &\leq C' \int_{\Omega} (1 + |u^1|^{\rho-1} + |u^2|^{\rho-1}) |w(t)|^2 dx \\ &\leq C' \left([\text{med}(\Omega)]^{\frac{\rho-1}{\rho+1}} + \|u^1(t)\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^{\rho-1} + \|u^2(t)\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^{\rho-1} \right) \|w(t)\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^2 \\ &\leq C' \left([\text{med}(\Omega)]^{\frac{\rho-1}{\rho+1}} + (\tilde{C}_0)^{\rho-1} \|u^1(t)\|_{H^1(\Omega)}^{\rho-1} + (\tilde{C}_0)^{\rho-1} \|u^2(t)\|_{H^1(\Omega)}^{\rho-1} \right) \|w(t)\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^2 \\ &\leq \tilde{C} \left(1 + \|u^1(t)\|_{H^1(\Omega)}^{\rho-1} + \|u^2(t)\|_{H^1(\Omega)}^{\rho-1} \right) \|w(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 \\ &\leq \tilde{C} \left(1 + \|U^1(t)\|_{\mathcal{H}}^{\rho-1} + \|U^2(t)\|_{\mathcal{H}}^{\rho-1} \right) \|w(t)\|_{L^4(\Omega)}^2, \end{aligned} \tag{6.152}$$

onde $\tilde{C} = 2C \max\left\{[\text{med}(\Omega)]^{\frac{\rho-1}{\rho+1}}, (\tilde{C}_0)^{\rho-1}\right\}$ e \tilde{C}_0 é a constante da imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+1}(\Omega)$.

Observe que para $N \in \{1, 2\}$, temos $\rho = 3$, e portanto $\rho - 1 = 2$ e $L^{\rho+1}(\Omega) = L^4(\Omega)$. Portanto, aplicando as estimativas (6.151) e (6.152), na desigualdade (6.149), obtemos:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}_{\tilde{\varepsilon}}(t) \leq -\frac{2\tilde{\varepsilon}}{3} \mathcal{E}_{\tilde{\varepsilon}}(t) + k(\tau, t) \|w(t)\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w_t(t) dx, \quad (6.153)$$

onde $k(\tau, t) = \tilde{C} \left(1 + \|U^1(t)\|_{\mathcal{H}}^{\rho-1} + \|U^2(t)\|_{\mathcal{H}}^{\rho-1} \right)$.

Aplicando a versão diferencial do Lema de Gronwall (Proposição A.6) em (6.153), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\tilde{\varepsilon}}(t) &\leq \mathcal{E}_{\tilde{\varepsilon}}(\tau) e^{-\frac{2\tilde{\varepsilon}}{3}(t-\tau)} + \sup_{s \in [\tau, t]} k(\tau, s) \int_{\tau}^t e^{-\frac{2\tilde{\varepsilon}}{3}(t-s)} \|w(s)\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^2 ds \\ &\quad + \int_{\tau}^t e^{-\frac{2\tilde{\varepsilon}}{3}(t-s)} \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w_t(s) dx ds \end{aligned} \quad (6.154)$$

Comparando (6.123) com (6.148), observamos que $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$. Assim, escolhendo $\sigma_2 := \frac{2\tilde{\varepsilon}}{3}$, temos que $\sigma_1 := \frac{2\varepsilon}{3} < \frac{2\tilde{\varepsilon}}{3} = \sigma_2$. Além disso, de (6.145) e (6.154), obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &\leq 2\mathcal{E}_{\tilde{\varepsilon}}(t) \leq 2\mathcal{E}_{\tilde{\varepsilon}}(\tau) e^{-\sigma_2(t-\tau)} + 2 \sup_{s \in [\tau, t]} k(\tau, s) \int_{\tau}^t e^{-\sigma_2(t-s)} \|w(s)\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^2 ds \\ &\quad + 2 \int_{\tau}^t e^{-\sigma_2(t-s)} \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w_t(s) dx ds \\ &\leq 3\mathcal{E}(\tau) e^{-\sigma_2(t-\tau)} + 2 \sup_{s \in [\tau, t]} k(\tau, s) \int_{\tau}^t e^{-\sigma_2(t-s)} \|w(s)\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^2 ds \\ &\quad + 2 \int_{\tau}^t e^{-\sigma_2(t-s)} \int_{\Omega} [f(u^2(t)) - f(u^1(t))] w_t(s) dx ds \end{aligned} \quad (6.155)$$

Finalmente, como $e^{-\sigma(t-s)} < 1$ para todo $s \in [\tau, t]$ e

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \|W(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2} \|U^1(t) - U^2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2} \|\mathcal{P}(t, \tau)U_{\tau}^1 - \mathcal{P}(t, \tau)U_{\tau}^2\|_{\mathcal{H}}^2,$$

de (6.155), obtemos (6.132), onde $C_{t, \tau} = 4 \sup_{s \in [\tau, t]} k(\tau, s)$ □

Proposição 6.13 (i) Se $N \in \{1, 2, 3\}$, então o processo de evolução $\{\mathcal{P}(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ definido em (6.107) é \mathcal{D} -pullback assintoticamente compacto.

(ii) Se $N \geq 4$ e existe uma constante $\tilde{C} > 0$ tal que:

$$|f'(u)| \leq \tilde{C}(1 + |u|^{\rho-2}); \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad (6.156)$$

então o processo de evolução $\{\mathcal{P}(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ definido em (6.107) é \mathcal{D} -pullback assintoticamente compacto.

Demonstração. Seja $\widehat{B}_0 = \{B(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ uma família \mathcal{D} -pullback absorvente, que é garantido pela Proposição 6.11. Dados $U_\tau^1, U_\tau^2 \in B_0(\tau)$, do Lema (6.12), segue que:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}(t, \tau)U_\tau^1 - \mathcal{P}(t, \tau)U_\tau^2\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq 3\|U_\tau^1 - U_\tau^2\|_{\mathcal{H}}^2 e^{-\sigma_2(t-\tau)} + C_{t, \tau} \int_\tau^t \|u^1(s) - u^2(s)\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^2 ds \\ &\quad + 4 \int_\tau^t \int_\Omega [f(u^2(s)) - f(u^1(s))] ((u^1)_t(t) - (u^2)_t(r)) dx ds \\ &\leq 3(2|r_0(\tau)|)^2 e^{-\sigma_2(t-\tau)} + C_{t, \tau} \int_\tau^t \|u^1(s) - u^2(s)\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^2 ds \\ &\quad + 4 \int_\tau^t \int_\Omega [f(u^2(s)) - f(u^1(s))] ((u^1)_t(t) - (u^2)_t(r)) dx ds \end{aligned} \quad (6.157)$$

onde $U^j(t) := \mathcal{P}(t, \tau)U_\tau^j = (u^j(t), \delta^j(t), v^j(t), z^j(t), \varphi^j(t))$ ($j = 1, 2$), $C_{t, \tau} = 2 \sup_{s \in [\tau, t]} k(\tau, s)$ e $k(\tau, t) = \tilde{C} \left(1 + \|U^1(t)\|_{\mathcal{H}}^{\rho-1} + \|U^2(t)\|_{\mathcal{H}}^{\rho-1} \right)$.

Observe que

$$K(\tau, t) = \tilde{C} \left(1 + \|U^1(t)\|_{\mathcal{H}}^{\rho-1} + \|U^2(t)\|_{\mathcal{H}}^{\rho-1} \right) < \infty; \quad \forall t \geq \tau,$$

uma vez que, de (6.130), obtemos

$$\|U^j(t)\|_{\mathcal{H}}^{\rho-1} = \|\mathcal{P}(t, \tau)U_\tau^j\|_{\mathcal{H}}^{\rho-1} \leq [3C_F(1 + |r(\tau)|^{\rho-1}) + |r_0(t)|^2]^{\frac{\rho-1}{2}} (j = 1, 2).$$

Além disso, de (6.128), tem-se:

$$|r_0(\tau)|^2 e^{-\sigma_2(t-\tau)} = \left(2m_0 e^{(\sigma_2 - \sigma_0)\tau} \int_{-\infty}^\tau e^{\sigma_0 s} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + (6C_f + 1) e^{\sigma_2 \tau} \right) e^{-\sigma_2 t}; \quad \forall t \geq \tau.$$

Como $\sigma_2 - \sigma_0 > 0$ e $\sigma_2 > 0$, temos que $e^{(\sigma - \sigma_0)\tau}, e^{\sigma_2 \tau} \rightarrow 0$ quando $\tau \rightarrow -\infty$. Logo

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \left(2m_0 e^{(\sigma_2 - \sigma_0)\tau} \int_{-\infty}^\tau e^{\sigma_0 s} \|h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + (6C_f + 1) e^{\sigma_2 \tau} \right) e^{-\sigma_2 t} = 0.$$

Assim, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\tau_\varepsilon \in \mathbb{R}$ (que depende de ε , de t e de \widehat{B}_0) tal que:

$$12|r_0(\tau_\varepsilon)|^2 e^{-\sigma_2(t-\tau_\varepsilon)} < \varepsilon^2. \quad (6.158)$$

Defina $f_\varepsilon : B_0(\tau_\varepsilon) \times B_0(\tau_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(U_{\tau_\varepsilon}^1, U_{\tau_\varepsilon}^2) &= \sqrt{C_{t, \tau_\varepsilon}} \left(\int_\tau^t \|u^1(s) - u^2(s)\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \\ &\quad + 2 \left| \int_{\tau_\varepsilon}^t \int_\Omega [f(u^2(s)) - f(u^1(s))] ((u^1)_t(t) - (u^2)_t(r)) dx ds \right|^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.159)$$

Dados $U_{\tau_\varepsilon}^1, U_{\tau_\varepsilon}^2 \in B_0(\tau_\varepsilon)$, das estimativas (6.157) e (6.158), segue que:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}(t, \tau_\varepsilon)U_{\tau_\varepsilon}^1 - \mathcal{P}(t, \tau_\varepsilon)U_{\tau_\varepsilon}^2\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq 12|r_0(\tau_\varepsilon)|^2 e^{-\sigma_2(t-\tau_\varepsilon)} + C_{t, \tau_\varepsilon} \int_{\tau_\varepsilon}^t \|u^1(s) - u^2(s)\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^2 ds \\ &\quad + 4 \int_{\tau_\varepsilon}^t \int_\Omega [f(u^2(s)) - f(u^1(s))] ((u^1)_t(t) - (u^2)_t(r)) dx ds \\ &\leq \varepsilon^2 + C_{t, \tau_\varepsilon} \int_{\tau_\varepsilon}^t \|u^1(s) - u^2(s)\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^2 ds \\ &\quad + 4 \int_{\tau_\varepsilon}^t \int_\Omega [f(u^2(s)) - f(u^1(s))] ((u^1)_t(t) - (u^2)_t(r)) dx ds, \end{aligned}$$

e portanto, de (6.159), obtemos:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}(t, \tau_\varepsilon)U_{\tau_\varepsilon}^1 - \mathcal{P}(t, \tau_\varepsilon)U_{\tau_\varepsilon}^2\|_{\mathcal{H}} &\leq \varepsilon + \sqrt{C_{t, \tau_\varepsilon}} \left(\int_{\tau_\varepsilon}^t \|u^1(s) - u^2(s)\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^2 ds \right)^{1/2} \\ &\quad + 2 \left| \int_{\tau_\varepsilon}^t \int_{\Omega} [f(u^2(s)) - f(u^1(s))] ((u^1)_t(t) - (u^2)_t(r)) dx ds \right|^{1/2} \\ &= \varepsilon + f_\varepsilon(U_{\tau_\varepsilon}^1, U_{\tau_\varepsilon}^2); \quad \forall U_{\tau_\varepsilon}^1, U_{\tau_\varepsilon}^2 \in B_0(\tau_\varepsilon). \end{aligned}$$

Assim, diante da Proposição 3.59, resta apenas mostrar que f_ε é uma função contrativa sobre $B_0(\tau_\varepsilon) \times B_0(\tau_\varepsilon)$ (ver Definição 3.25). De fato, seja $(U_{\tau_\varepsilon}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de valores iniciais em $B_0(\tau_\varepsilon)$, com

$$U^n(t) := \mathcal{P}(t, \tau_\varepsilon)U_{\tau_\varepsilon}^n = (u^n(t), \delta^n(t), v^n(t), z^n(t), \varphi^n(t)) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Observe que, de (6.130), obtemos:

$$\|U^n(s)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\mathcal{P}(s, \tau_\varepsilon)U_{\tau_\varepsilon}^n\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 3C_F (1 + |r(\tau_\varepsilon)|^{\rho-1}) + |r_0(t)|^2 < \infty; \quad \forall \tau_\varepsilon \leq s \leq t.$$

Logo,

$$\left| \begin{array}{l} (u^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é uma sequência limitado em } L^2(\tau_\varepsilon, t; H^1(\Omega)), \\ (v^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é uma sequência limitada em } L^2(\tau_\varepsilon, t; L^2(\Omega)), \end{array} \right. \quad (6.160)$$

Observe que $H^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$ são espaços reflexivos (Espaços de Hilbert) e vele a seguinte cadeia de imersões:

$$H^1(\Omega) \xrightarrow{\text{comp}} L^{\rho+1}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \quad (\text{Ver Teorema 1.28}). \quad (6.161)$$

Como $v_n = (u^n)_t$ para todo $n \in \mathbb{N}$, as estimativas em (6.160), as imersões em (6.161) permitem a aplicação do Teorema de Aubin-Lions (Teorema 1.35), e o Teorema de Aubin-Lions garante a existência de uma subsequência $(u^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ e uma função $u \in L^2(\tau_\varepsilon, t; L^{\rho+1}(\Omega))$ tais que:

$$u^{n_k} \rightarrow u \text{ (fortemente) em } L^2(\tau_\varepsilon, t; L^{\rho+1}(\Omega)). \quad (6.162)$$

De (6.162), segue que $(u^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\tau_\varepsilon, t; L^{\rho+1}(\Omega))$, e portanto:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\tau_\varepsilon}^t \|u^{n_k}(s) - u^{n_l}(s)\|_{L^{\rho+1}(\Omega)}^2 ds = 0. \quad (6.163)$$

O limite em (6.163), mostra que $(U^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, com $U^{n_k} = (u^{n_k}, \delta^n, v^{n_k}, z^n, \varphi^n)$ é uma subsequência de $(U^n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que, a primeira parcela de $f_\varepsilon(U^{n_k}, U^{n_l})$ converge à zero (Ver expressão em (6.159)). Assim, para mostrar que f_ε é de fato contrativa, precisamos mostrar que a segunda parcela de $f_\varepsilon(U^{n_k}, U^{n_l})$ também converge à zero. Contudo, essa segunda parcela envolve termos com crescimento crítico e portanto apresenta um certo grau de dificuldade, que acarretou em uma restrição no crescimento da não linearidade f do problema quando a dimensão $N > 3$. Diante disso, dividimos a demonstração em dois casos.

Primeiramente, observe que:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\tau_\varepsilon}^t \int_{\Omega} [f(u^{n_l}(s)) - f(u^{n_k}(s))] [(u^{n_k})_t(s) - (u^{n_l})_t(s)] dx ds \\
 &= \int_{\tau_\varepsilon}^t \int_{\Omega} [f(u^{n_l}(s))(u^{n_k})_t(s) + f(u^{n_k}(s))(u^{n_l})_t(s)] dx ds \\
 &\quad - \int_{\tau_\varepsilon}^t \int_{\Omega} f(u^{n_l}(s))(u^{n_l})_t(s) dx ds - \int_{\tau_\varepsilon}^t \int_{\Omega} f(u^{n_k}(s))(u^{n_n})_t(s) dx ds \\
 &= \int_{\tau_\varepsilon}^t \int_{\Omega} [f(u^{n_l}(s))(u^{n_k})_t(s) + f(u^{n_k}(s))(u^{n_l})_t(s)] dx ds \\
 &\quad - \int_{\Omega} [F(u^{n_k}(t)) + F(u^{n_l}(t))] dx + \int_{\Omega} [F(u^{n_k}(\tau_\varepsilon)) + F(u^{n_l}(\tau_\varepsilon))] dx. \tag{6.164}
 \end{aligned}$$

Se $N \in \{1, 2, 3\}$, da hipótese (6.8), temos que $|F(u)| \leq C(1 + |u|^4)$ para todo $u \in \mathbb{R}$, e portanto, a função F satisfaz as condições de Carathéodory, sendo $N_F : L^5(\Omega) \rightarrow L^{\frac{5}{4}}(\Omega)$ o seu operador de Nemytskii (Ver Teorema A.14). Como, nesse caso ($N \leq 3$) o Teorema de Rellich-Kondrachov, garante que $H^1(\Omega) \xrightarrow{\text{comp}} L^5(\Omega)$. Assim, aplicando o Teorema de Aubin-Lions, tem-se:

$$u^{n_k} \rightarrow u \text{ (fortemente) em } L^2(\tau_\varepsilon, t; L^5(\Omega)) \quad (N \leq 3) \tag{6.165}$$

Como $N_F : L^5(\Omega) \rightarrow L^{\frac{5}{4}}(\Omega)$ e $L^{\frac{5}{4}}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ do limite em (6.165), obtemos:

$$\|F(u^k(t))\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow \|F(u(t))\|_{L^1(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|F(u^k(\tau_\varepsilon))\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow \|F(u(\tau_\varepsilon))\|_{L^1(\Omega)} \tag{6.166}$$

Se $N > 3$, suponha que existe constante $\tilde{C} > 0$ satisfazendo (6.156). Nesse caso, temos que $|F(u)| \leq \tilde{C}(1 + |u|^\rho)$, e portanto, F satisfaz as condições de Carathéodory, sendo $N_F : L^{\rho+1}(\Omega) \rightarrow L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega)$ o seu operador de Nemytskii. Do Teorema de Rellich-Kondrachov, segue que: $H^1(\Omega) \xrightarrow{\text{comp}} L^{\rho+1}(\Omega)$. Assim, podemos utilizar as limitações em (6.156) para aplicar o Teorema de Aubin-Lions e garantir que

$$u^{n_k} \rightarrow u \text{ (fortemente) em } L^2(\tau_\varepsilon, t; L^{\rho+1}(\Omega)) \quad (N > 3); \tag{6.167}$$

e como $N_F : L^{\rho+1}(\Omega) \rightarrow L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega)$ e $L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, obtemos (6.166).

por outro lado, como $H^1(\Omega) \xrightarrow{\text{comp}} L^2(\Omega)$, qualquer que seja $N \in \mathbb{N}$ (do Teorema de Aubin-Lions), segue que:

$$u^{n_k} \rightarrow u \text{ (fortemente) em } L^2(\tau_\varepsilon, t; L^2(\Omega)), \tag{6.168}$$

e como $L^2(\tau_\varepsilon, t; L^2(\Omega))$ é reflexivo, da segunda estimativa em (6.160), segue que:

$$(u^{n_k})_t \rightharpoonup u_t \text{ (fracamente) em } L^2(\tau_\varepsilon, t; L^2(\Omega)). \tag{6.169}$$

Além disso, para $N \in \{1, 2, 3\}$, temos $|f(u)| \leq C(1 + |u|^3)$ e quando $N > 3$, tem-se $|f(u)| \leq \tilde{C}(1 + |u|^{\rho-1})$. Assim, o operador de Nemytskii de f é dado por:

$$N_f : L^4(\Omega) \rightarrow L^{\frac{4}{3}}(\Omega) \quad (N \leq 3) \quad \text{e} \quad N_f : L^{\rho+1}(\Omega) \rightarrow L^{\frac{\rho+1}{\rho}}(\Omega) \quad (N > 3).$$

Note que

$$(N_f)_{|L^6(\Omega)} : L^6(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \quad (N \leq 3) \quad \text{e} \quad (N_f)_{|L^{\frac{2(\rho^2-1)}{\rho}}(\Omega)} : L^{\frac{2(\rho^2-1)}{\rho}}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \quad (N > 3). \quad (6.170)$$

Defina:

$$G_l^k(s) = \int_{\Omega} f(u^{n_k}(s))(u^{n_k})_t(s) dx \quad \text{e} \quad G^k(s) = \int_{\Omega} f(u(s))(u^{n_k})_t(s) dx,$$

e observe que:

$$|G_l^k(s)| \leq \left(\int_{\Omega} |f(u^{n_l}(s))|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{\Omega} |(u^{n_k})_t(s)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (6.171)$$

Para $N \leq 3$, temos que $(u^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(\tau_{\varepsilon}, t; L^5(\Omega))$ (ver (6.165)) e $L^6(\Omega) \hookrightarrow L^5(\Omega)$, e para $N > 3$, temos $(u^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(\tau_{\varepsilon}, t; L^{\rho+1}(\Omega))$ (ver (6.167)) e $L^{\frac{2(\rho^2-1)}{\rho}}(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+1}(\Omega)$. Como o operador de Nemytskii leva conjuntos limitados em conjuntos limitados, utilizando os respectivos operadores de Nemytskii (ver (6.170)) e o fato de $(u^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ser limitado em $L^2(\tau_{\varepsilon}, t; L^2(\Omega))$ (ver (6.169)), obtemos uma constante $M > 0$ tal que

$$|G_l^k(s)| \leq M \quad \text{em quase todo ponto} \quad s \in [\tau_{\varepsilon}, t].$$

Afirmamos que $G_l^k(s) \rightarrow G^k(s)$ quase sempre em $[\tau_{\varepsilon}, t]$ quando $l \rightarrow +\infty$. De fato:

$$|G_l^k(s) - G^k(s)| \leq \int_{\Omega} |f(u^{n_l}(s)) - f(u(s))| \cdot |(u^{n_k})_t(s)| dx \rightarrow 0,$$

quase sempre em $[\tau_{\varepsilon}, t]$, quando $l \rightarrow \infty$.

Portanto, do Teorema da Convergência Dominada, temos:

$$\int_{\tau_{\varepsilon}}^t G_l^k(s) ds \rightarrow \int_{\tau_{\varepsilon}}^t G^k(s) ds \quad \text{quando } l \rightarrow \infty. \quad (6.172)$$

Assim, de (6.169) e (6.172), tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\tau_{\varepsilon}}^t \int_{\Omega} f(u^{n_k}(s))(u^{n_l})_t(s) dx ds \right] &= \int_{\tau_{\varepsilon}}^t \int_{\Omega} f(u(s)) u_t(s) dx ds \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\tau_{\varepsilon}}^t \int_{\Omega} f(u^{n_l}(s))(u^{n_k})_t(s) dx ds \right], \end{aligned}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\tau_{\varepsilon}}^t \int_{\Omega} [f(u^{n_k}(s))(u^{n_l})_t(s) + f(u^{n_l}(s))(u^{n_k})_t(s)] dx ds &= 2 \int_{\tau_{\varepsilon}}^t \int_{\Omega} f(u(s)) u_t(s) dx ds \\ &= 2 \int_{\Omega} F(u(t)) dx - 2 \int_{\Omega} F(u(\tau_{\varepsilon})) dx. \end{aligned} \quad (6.173)$$

Finalmente, aplicando (6.166) e (6.173) em (6.164), obtemos:

$$\begin{aligned} &\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\tau_{\varepsilon}}^t \int_{\Omega} [f(u^{n_l}(s)) - f(u^{n_k}(s))] [(u^{n_k})_t(s) - (u^{n_l})_t(s)] dx ds \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\tau_{\varepsilon}}^t \int_{\Omega} [f(u^{n_l}(s))(u^{n_k})_t(s) + f(u^{n_k}(s))(u^{n_l})_t(s)] dx ds \\ &\quad - \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [F(u^{n_k}(t)) + F(u^{n_l}(t))] dx + \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [F(u^{n_k}(\tau_{\varepsilon})) + F(u^{n_l}(\tau_{\varepsilon}))] dx \\ &= 2 \int_{\Omega} F(u(t)) dx - 2 \int_{\Omega} F(u(\tau_{\varepsilon})) dx - 2 \int_{\Omega} F(u(t)) dx + 2 \int_{\Omega} F(u(\tau_{\varepsilon})) dx = 0. \end{aligned} \quad (6.174)$$

Portanto de (6.163) e (6.174), segue que f_ε é contrativa, e isto completa a prova. \square

Finalmente, no que segue, provaremos que o processo $\{\mathcal{P}(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ admite um atrator pullback (ver Definição 3.54).

Teorema 6.14

Se $\sigma_0 \leq \sigma_1$, então O processo de evolução $\{\mathcal{P}(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ definido em (6.107) admite um (único) \mathcal{D} -atrator pullback, quando $N \leq 3$ ou quando $N > 3$ e existe uma constante $\tilde{C} > 0$ satisfazendo (6.156).

Além disso, se $\sigma_0 < \frac{\sigma_1}{2}$, então esse atrator pertence ao universo \mathcal{D} .

Demonstração. Se $\sigma_0 \leq \sigma_1$, a Proposição 6.11 garante que o Processo de Evolução $\{\mathcal{P}(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ admite uma família $\widehat{B}_0 = \{B_0(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ de conjuntos \mathcal{D} -pullback absorventes. Além disso, da Proposição 6.13, segue que (em qualquer um dos casos (i) ou (ii)), o processo $\{\mathcal{P}(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$ é \mathcal{D} -pullback assintoticamente compacto. Portanto, o Teorema 3.58 garante a existência de uma \mathcal{D} -atrator pullback $\{\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ dado por:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) = \overline{\bigcup_{\widehat{D} \in \mathcal{D}} \omega(\widehat{D}, t)}; \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, se $\sigma_0 < \frac{\sigma_1}{2}$, a Proposição 6.11, garante que $\widehat{B}_0 \in \mathcal{D}$, e portanto, do Teorema 3.58 segue que $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t) = \omega(\widehat{B}_0, t) \subset \overline{B_0(t)}$ e $\{\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \in \mathcal{D}$. \square

Neste capítulo estabelecemos a existência e unicidade de soluções globais para o problema de valor inicial e de contorno (6.2)–(6.6), tanto na formulação branda quanto na forte, sob hipóteses adequadas sobre os dados iniciais e os coeficientes do modelo. O Teorema 6.7 mostrou que, a partir de dados em espaços de energia natural, obtemos uma única solução branda global com regularidade (6.62). Com hipóteses adicionais de regularidade dos dados e da força externa h , provamos a existência de soluções fortes globais com regularidade (6.63), e ainda, sob hipóteses de compatibilidade e de Lipschitzianidade para g , alcançamos regularidade local mais elevada (6.64). Dessa forma, foi completada a análise da boa colocação do modelo.

No que diz respeito ao comportamento assintótico, formulamos o problema como um processo de evolução $\{\mathcal{P}(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$. Introduzimos o universo \mathcal{D} adequado para o contexto não-autônomo. Com esse arcabouço, mostramos inicialmente a existência de famílias pullback absorventes (Proposição 6.11), controladas por funções de energia dependentes do forçamento externo h . Em seguida, por meio de estimativas de energia refinadas, provamos que o processo associado é \mathcal{D} -pullback assintoticamente compacto (Proposição 6.13), sob hipóteses de crescimento natural sobre a não linearidade f .

Esses resultados culminaram no Teorema 6.14, que garante a existência de um \mathcal{D} -atrator pullback para o processo $\{\mathcal{P}(t, \tau)\}_{t \geq \tau}$. Esse atrator fornece a descrição assintótica completa do sistema quando $N \leq 3$, ou ainda quando $N > 3$, sob condições adicionais de crescimento sobre f . Além disso, verificamos que, se $(\sigma_0 < \frac{\sigma_1}{2})$, o atrator pertence ao universo \mathcal{D} .

Apesar desses avanços, permanecem questões em aberto que merecem ser exploradas em trabalhos futuros. Um caminho natural consiste em estender a análise para o caso em que $N > 3$, relaxando as condições impostas sobre f , para hipóteses tão gerais quanto as do caso $N \leq 3$. Esse desafio envolve superar dificuldades técnicas na obtenção de imersões compactas sob o expoente crítico de Sobolev.

Outro rumo promissor é a investigação da existência de um atrator uniforme, o qual forneceria uma descrição assintótica independente do universo escolhido e permitiria discutir estabilidade estrutural em relação a perturbações externas. Esse tipo de objeto dinâmico tem sido estudado em trabalhos recentes, como em Matofu (BORTOT; SOUZA, 2025), que analisa a existência de atrator uniforme para o modelo (6.1). A adoção desse enfoque pode abrir caminho para resultados de robustez e continuidade em relação a perturbações no sistema.

Em suma, a elaboração desta tese resultou em um trabalho robusto e de grande valor acadêmico, que reúne desde os fundamentos clássicos da teoria das distribuições e dos espaços de Sobolev, passando pela teoria de semigrupos de operadores lineares limitados e pela análise da geração e estabilidade de semigrupos lineares, até alcançar o estudo recente e mais complexo da dinâmica não linear e não autônoma. Nesse contexto, exploramos as modernas teorias de semigrupos de operadores não lineares contínuos e de processos de evolução para problemas não autônomos, estabelecendo um elo entre resultados abstratos e aplicações concretas.

O trabalho não apenas sistematiza e integra essas diferentes abordagens, como também apresenta aplicações diretas de cada uma delas: semigrupos de operadores lineares, semigrupos de operadores não lineares e processos de evolução. Essas aplicações têm importância central na pesquisa contemporânea em equações de evolução, pois permitem compreender a longo prazo a dinâmica de sistemas dissipativos e a sua tendência para estados assintóticos estáveis.

Entre os conceitos centrais destacados, a estabilidade de semigrupos aparece como ponto de partida essencial para a análise qualitativa das soluções. A noção de atrator global fornece uma estrutura invariante e compacta que descreve o comportamento assintótico dos sistemas autônomos, enquanto o atrator pullback amplia esse quadro para problemas não autônomos, oferecendo um instrumento mais refinado para a compreensão da dinâmica dependente do tempo. A articulação entre esses conceitos mostra a profundidade e a atualidade dos resultados aqui desenvolvidos.

Dessa forma, considero que o presente trabalho cumpre plenamente seu propósito inicial e final: integrar teoria e aplicação em torno de uma linha coerente de investigação, contribuindo tanto para a consolidação de resultados clássicos quanto para o avanço em direções recentes e promissoras da análise de equações de evolução.

Referências

- ADNANE, A.; BENAISSE, A.; BENOMAR, K. Uniform stabilization for a timoshenko beam system with delays in fractional order internal dampings. *SeMA*, v. 80, p. 283–302, 2023.
- ALSHABANAT, A. et al. Generalization of caputo-fabrizio fractional derivative and applications to electrical circuits. *Front. Phys.*, v. 8, p. 1–10, 2020.
- AMMARI, K.; HASSINE, F.; ROBBIANO, L. *Stabilization for Some Fractional-Evolution Systems*. Switzerland,: SpringerBriefs in Mathematics, 2022.
- AMMARI, K. et al. Stability of the rao-nakra sandwich beam with a dissipation of fractional derivative type: Theoretical and numerical study. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2025.
- AMMARI, K.; SHEL, F. *Stability of Elastic Multi-Link Structures*. Switzerland: Springer, 2002.
- AOUADI, M. Global and exponential attractors for extensible thermoelastic plate with time-varying delay. *J. Differential Equations*, v. 260, p. 4079–4115, 2020.
- AOURAGH, M. D.; BAZ, M. E.; SEGAOUI, M. Analysis of a thermoelastic timoshenko beam model. *Acta. Mech.*, v. 231, p. 4111–4127, 2020.
- AOURAGH, M. D.; BAZ, M. E.; SEGAOUI, M. Stability and numerical results for a suspension bridge of timoshenko type with second sound. *Comp. Appl. Math*, v. 43, p. 178, 2024.
- ARAGÓN, L.; PUCHOL, V.; ASTIZ, M. A. Influence of the modal damping ratio calculation method in the analysis of dynamic events obtained in structural health monitoring of bridges. *J Civil Struct Health Monit*, 2024.
- ARENKT, W.; BATTY, C. J. K. Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups. *Trans. Am. Math. Soc.*, v. 306, n. 2, p. 837–852, 1988.
- ARIOLI, G.; GAZZOLA, F. On a nonlinear nonlocal hyperbolic system modeling suspension bridges. *Milan J. Math.*, v. 83, p. 211–236, 2015.
- AROSIO, A. *Averaged evolution equations. The Kirchhoff string and its treatment in scales of Banach spaces*. Trieste: expanded text of a lecture given in 2^a workshop on functional-analytic methods in complex analysis, W. Tutschke ed., World Scientific, Singapore, 1993.
- AROSIO, A.; GARAVALDI, S. On the mildly degenerate kirchhoff string. *Math. Meth. Appl. Sci.*, v. 14, 1991.
- ATTOUCH, H. H.; BUTTAZZO, G.; MICHAILLE, G. *Variational analysis in Sobolev and BV spaces:applications to PDEs and optimization*. [S.I.]: MPS-SIAM series on optimization, 2006.
- BARTLE, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. USA,: John Wiley & Sons Inc., 1996.

- BATTY, C. J. K.; CHILL, R.; TOMILOV, Y. Fine scales of decay of operator semigroups. *Journal of the European Mathematical Society*, v. 18, p. 853–929, 2016.
- BEALE, J. T. Spectral properties of an acoustic boundary conditions. *Indiana Univ. Math. J.*, v. 25, p. 895–917, 1976.
- BEALE, J. T.; ROSENCRANS, S. I. Acoustic boundary conditions. *Amer. Math. Soc.*, v. 80, p. 1276–1278, 1974.
- BENAISSA, A.; BENAZZOUZ, S. Well-posedness and asymptotic behavior of timoshenko beam system with dynamic boundary feedback of fractional derivative type. *Z. Angew. Math. Phys.*, v. 68, p. 1–38, 2017.
- BORICHEV, A.; TOMILOV, Y. Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. *Math. Ann.*, v. 347, p. 455–478, 2010.
- BORTOLAN, M. C. *Elementos da Teoria Espectral*. [S.I.]: Universidade Federal de Santa Catarina, 2021.
- BORTOT, C. A.; SOUZA, T. M. Uniform attractor of non-autonomous wave equations with acoustic boundary condition. *Journal of Mathematical Physics*, v. 66, p. 041501, 2025.
- BOTELHO, G.; PELLEGINO, D.; TEXEIRA, E. *Fundamentos da Análise Funcional*. [S.I.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.
- BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. New York: Springer, 2010.
- CANTISÁN, J. et al. Delay-induced resonance in the time-delayed duffing oscillator. *Int. J. Bifurc. Chaos*, v. 30, p. 2030007, 2020.
- CAPUTO, M. Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent-ii. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, v. 13, p. 529–539, 1967.
- CAPUTO, M. *Elasticità e Dissipazione*. Bologna: Zanichelli, 1969.
- CARABALL, T. et al. A gradient-like nonautonomous evolution process. *I. J. of Bifurcation and Chaos*, v. 20, p. 2751–2760, 2010.
- CARVALHO, A. N.; LANGA, J. A.; ROBINSON, J. C. *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*. [S.I.]: Springer, 2013. v. 28.
- CAVALCANTI, M.; CAVALCANTI, V. *Introdução à teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev*. Maringá: UEM, 2009.
- CHENG, Y.; DONG, Z.; REGAN, D. Exponential stability of axially moving kirchhoff-beam systems with nonlinear boundary damping and disturbance. *American Institute of Mathematical Sciences*, v. 27, p. 431–4346, 2022.
- CHOI, J.; MACCAMY, R. Fractional order volterra equations with applications to elasticity. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 139, p. 548–564, 1989.
- CHUESHOV, I.; LASIECKA, I. Long-time behavior of second order evolution equations with nonlinear damping. *Mem. Amer. Math. Soc.*, v. 195, n. 912, 2008.
- CHUESHOV, I.; LASIECKA, I. *Von Karman Evolution Equations: Well-posedness and Long-Time Dynamics*. New York,: Springer, 2010.

- COCCOLO, M. et al. Delay-induced resonance suppresses damping-induced unpredictability. *Phil. Trans.R. Soc. A*, v. 379, p. 20200232, 2021.
- COCCOLO, M. et al. Fractional damping effects on the transient dynamics of the duffing oscillator. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, v. 117, p. 106959, 2023.
- COCCOLO, M.; SEOANE, J. M.; SANJUÁN, M. A. F. Fractional damping induces resonant behavior in the duffing oscillator. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, v. 133, p. 107965, 2024.
- CONWAY, J. B. *Functions of One Complex Variable*. [S.I.]: Springer-Verlag, 1978.
- DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias*. [S.I.]: IMPA, 2008.
- EULER, L. De progressionibus transcendentibus, sev quarum termini algebraice dari nequeunt. *Comment. Acad. Sci. Imperiales Petropolitanae*, v. 1, n. 1, p. 38–57, 1738.
- EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. USA,: American Mathematical Society, 2010.
- FEDERER, H. *Geometric Measure Theory*. [S.I.]: Springer-Verlag, 1969.
- FEREIRA, J. et al. Stability result for a kirchhoff beam equation with variable exponent and time delay. *Universal Journal of Mathematics and Applications*, v. 5, p. 1–9, 2022.
- FRIEGERI, S. Attractors for semilinear damped wave equations with an acoustic boudary condition. *J. Evolutions Equation*, v. 10, p. 29–58, 2010.
- FROTA, C. L.; GOLDSTEIN, J. A. Some nonlinear wave equations with acoustic boundary conditions. *J. Differential Equations*, v. 164, p. 92–109, 2000.
- GEARHART, L. Spectral theory for contraction semigroups on hilbert space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, v. 236, p. 385–394, 1978.
- GUTEMBERG, L. et al. Stability analysis of a partially damped suspension bridge by friction. *Electron. J. Math.*, v. 8, n. 2, p. 1–18, 2024.
- JESUS, R. D. et al. Well-posedness and asymptotic behavior of a suspension bridge system of timoshenko-ehrenfest type with fractional derivative damping. *Acta Mech*, v. 236, p. 6569–6598, 2025.
- JESUS, R. D. et al. Timoshenko system with internal dissipation of fractional derivative type. *Journal of Applied Analysis & Computation*, v. 139, n. 2, p. 548–564, 2025.
- JESUS, R. O. D. et al. Existence of global solution and global attractor for a suspended bridge system of kirchhoff type with fractional derivative damping. *Journal Of Evolution Equations*, 2025.
- KATO, T. *Abstract differential equations and nonlinear mixed problems*. [S.I.]: Accademia Nazionale Dei Lincei, 1985.
- KILBAS, A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. *Theory and applications Of fractional difrential EQUATIONS*. Amsterdam,: Elsevier, 2006.
- KIRCHOOF, V. *Vorlesungen ober mathematische Physik: Mechanik*. Leipzig,: ch. 29 x7, Teubner, 1876.
- LIONS; ROBERT; DAUTRAY. *Functional and Variable methods*. Berlim: Springer, 2000.
- LIONS, J.; MAGENES, E. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol 1. Paris: Dunod, 1968.

- LIU, Z.; ZHENGZ, S. *Semigroups Associated with Dissipative Systems*. New York: Springer, 2011.
- MA, T. F.; NARCISO, V. Global attractor for model of extensible beam with nonlinear damping and source terms. *Nonlinear Analisys Theory: Methods e Applications*, v. 73, p. 3402–3412, 2010.
- MA, T. F.; SOUZA, T. M. Pullback dynamics of non-autonomous wave equations with an acoustic boundary condition. *Differential and Intragral Equations*, v. 30, n. 5-6, p. 443–462, 2017.
- MAGIN, R. L. *Fractional calculus in bioengineering*. Redding,: Begell House, 2006.
- MBODJE, B. Wave energy decay under fractional derivative controls. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, v. 23, n. 23, p. 237–257, 2006.
- MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. *Espaços de Sobolev: Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos*. Rio de Janeiro: UFRJ, 2000.
- MIRANDA, L. G. R.; RAPOSO, C. A.; FREITAS, M. M. Global and exponential attractors for a suspension bridge model with nonlinear damping. *J. Differential Equations*, v. 431, p. 113–217, 2025.
- NAKAO, M. Global attractors for wave equations with nonlinear dissipative terms. *J. Diferential Equations*, v. 227, p. 204–229, 2006.
- NASCIMENTO, F.; NONATO, C.; RAMOS, A. Decay rates for timoshenko beam system with suspenders and arbitrary nonlinear localized damping. *Acta Mech*, 2025.
- OLIVEIRA, W.; CORDEIRO, S.; CUNHA, C. D. Asymptotic behavior for a porous-elastic system with fractional derivative-type internal dissipation. *Fract Calc Appl Anal*, v. 27, p. 1314–2224, 2024.
- ORTIZ, A. et al. Fractional damping enhances chaos in the nonlinear helmholtz oscillator. *Nonlinear Dyn.*, v. 102, p. 2323–2337, 2020.
- PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. New York: Vol. 44 of Applied Math. Sciences, Springer-Verlag, 1983.
- PEREIRA, D. C.; RAPOSO, C. A.; CATTAI, A. P. Global existence and energy decay for a coupled system of kirchhoff beam equations with weakly damping and logarithmic source. *Turkish Journal of Mathematics*, v. 46, p. 465–480, 2022.
- PODLUNY, I. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Cambridge,: Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, 1998.
- POKHOZHAEV, S. I. The kirchhoff quasilinear hyperbolic equation. *Di erentsial'nye Uravneniya*, v. 21, p. 82–87, 1985.
- QIN, C.; DU, J.; LIN, g. Random attractors for the kirchhoff-type suspension bridge equations with strong damping and white noises. *International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application*, v. 6, p. 134–147, 2017.
- RAPOSO, C. et al. Suspension bridge with internal damping. *Acta. Math.*, 2023.
- RAPOSO, C. A. Suspension bridge model with laminated beam. *Mathematica Moravica*, v. 27, n. 2, p. 77–90, 2023.
- RAPOSO, C. A. et al. Exponential stability for the timoshenko system with two weak dampings. *Appl. Math. Lett.*, v. 18, p. 535–541, 2005.

- RENARDY, M.; ROGERS, R. C. *An introduction to Partial Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 2004.
- ROBINSON, J. C. *Infinite-dimensional dynamical systems an introduction to dissipative: parabolic PDEs and the theory of global attractors*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. v. 28.
- ROBINSON, J. C. *Dimensions, embeddings, and attractors*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2011. v. 28.
- RUDIN, W. *Functional analysis*. United States: McGraw-Hill, Inc., 1991.
- SHAIKH, A. S.; SHAIKH, I. N.; NISAR, K. S. Generalization of caputo-fabrizio fractional derivative and applications to electrical circuits. *Adv. Differ. Equ.*, v. 373, p. 1–19, 2020.
- SOUFYANE, A. Stabilisation de la poutre de timoshenko. *C. R. Acad. Sci.*, v. 328, p. 731–734, 1999.
- TARASOV, V. E. *Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media*. Berlin,: Springer, 2011.
- TEMAM. *Functional and Variable methods*. Amsterdam: Theory and Numerical Analysis, 1974.
- TIMOSHENKO, S. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philos. Mag.*, v. 41, p. 744–746, 1921.
- YOSIDA, K. *Functional analysis*. New York: Springer, 1965.
- ZARRAGA, O. et al. An analysis of the dynamical behaviour of systems with fractional damping for mechanical engineering applications. *Symmetry*, v. 11, p. 1–15, 2019.

APÊNDICE A

Resultados Clássicos

Teorema A.1 (Lema de Du Bois Raymond)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e,

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Então, $f(x) = 0$, em quase todo ponto $x \in \Omega$.

Demonstração. (Ver ([CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2009](#)), Proposição 4). □

Teorema A.2 (Teorema da Convergência Dominada)

Sejam (X, \mathfrak{X}, μ) um espaço de medida e $\mathcal{L}(X, \mathfrak{X}, \mu)$ o espaço das funções integráveis. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um sequência de funções em $\mathcal{L}(X, \mathfrak{X}, \mu)$ tal que

$$\lim f_n(x) = f(x), \text{ para quase todo ponto } x \in X,$$

para alguma função mensurável $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Se existir uma função integrável $g \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{X}, \mu)$ tal que $|f_n(x)| < g(x)$ para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$f \in \mathcal{L}(X, \mathfrak{X}, \mu) \text{ e } \lim \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Demonstração. ver ([\(BARTLE, 1996\)](#), Teorema 5.6). □

Proposição A.3 (Desigualdade de Young)

Sejam $1 < p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

qualquer que sejam os números reais $a, b \geq 0$.

Demonstração. Veja ([\(BREZIS, 2010\)](#), Teorema 4.6). □

Corolário A.4

Sejam $a, b \geq 0$ e $p, q \in \mathbb{R}$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para todo $\varepsilon > 0$ dado, tem-se:

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q,$$

onde $C(\varepsilon) > 0$ é uma constante dependente do ε dado.

Demonstração. Basta notar que

$$ab = (\varepsilon p)^{1/p} \frac{1}{(\varepsilon p)^{1/p}} = ((\varepsilon p)^{1/p} a) \left(\frac{b}{(\varepsilon p)^{1/p}} \right),$$

e aplicar a desigualdade de Young (Proposição A.3) que segue o resultado, com $C(\varepsilon) = \frac{1}{q(\varepsilon p)^{q/p}}$. \square

Proposição A.5 (Desigualdade de Hölder)

Seja (X, \mathfrak{X}, μ) um espaço de medida e sejam $f \in L^p := L^p(X, \mathfrak{X}, \mu)$ e $g \in L^q := L^q(X, \mathfrak{X}, \mu)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $f g \in L^1 := L^1(X, \mathfrak{X}, \mu)$ e

$$\|f g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Demonstração. Ver ((BARTLE, 1996), Teorema 6.9). \square

Proposição A.6 (Lema de Gronwall–Versão diferencial)

Sejam $\tau \in \mathbb{R}$, $f, g : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis e $u : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa e diferenciável em $(\tau, T) \subset \mathbb{R}$ tais que:

$$\frac{du}{dt} \leq f(t)u(t) + g(t); \quad \forall t \in [\tau, T].$$

Então

$$u(t) \leq u(\tau) e^{\int_{\tau}^t f(r) dr} + \int_{\tau}^t g(s) e^{\int_{\tau}^s f(r) dr} ds; \quad \forall t \in [\tau, T].$$

Além disso, se f e g forem não negativas, então:

$$u(t) \leq e^{\int_{\tau}^t f(r) dr} \left(u(\tau) + \int_{\tau}^t g(s) ds \right); \quad \forall t \in [\tau, T].$$

Demonstração. ver ((EVANS, 2010), página 708). \square

Proposição A.7 (Lema de Gronwall–Versão integral)

Sejam $\tau \in \mathbb{R}$, $a : [\tau, T]$ uma função crescente, $b : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável e $u : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e não negativa tais que

$$u(t) \leq a(t) + \int_{\tau}^t b(s)u(s) ds; \quad \forall t \in [\tau, T].$$

Então

$$u(t) \leq a(t) e^{\int_{\tau}^t b(s) ds}.$$

Demonstração. ver ((DOERING; LOPES, 2008), Lema 10.18) ou ((EVANS, 2010), página 709). \square

Proposição A.8 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Seja $(\mathbb{V}; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial com produto interno. Se $u, v \in \mathbb{V}$, então

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|,$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, os vetores u e v são linearmente dependentes.

Demonstração. Veja ((BOTELHO; PELLEGINO; TEXEIRA, 2015), Proposição 5.1.2). \square

Teorema A.9 (Lax-Milgram)

Sejam $(H; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{B} : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ uma forma sesquilinear:

- (i) contínua. (Isto é, existe $C > 0$, talque $|\mathcal{B}(u, v)| \leq C \cdot \|u\| \|v\|$; $\forall u, v \in H$),
- (ii) coerciva. (Isto é, existe $C > 0$ tal que $\operatorname{Re}[\mathcal{B}(u, u)] \geq C \cdot \|u\|^2$; $\forall u \in H$).

Então, para todo funcional $\mathcal{L} : H \rightarrow \mathbb{C}$ antilinear limitado, existe um único $u \in H$ tal que

$$\mathcal{B}(u, v) = \mathcal{L}(v), \quad \text{para todo } v \in H.$$

Demonstração. Veja ((BREZIS, 2010), Corolário 5.8). \square

Teorema A.10 (Alternativa de Fredholm)

Seja X um espaço de Banach. Se $\mathcal{L} : X \rightarrow X$ é um operador linear compacto sobre X , então

- (i) $\ker(I - \mathcal{L})$ tem dimensão finita.
- (ii) $(I - \mathcal{L})(X)$ é fechado
- (iii) $\ker(I - \mathcal{L}) = \{0\} \Leftrightarrow (I - \mathcal{L})(X) = X$.

Demonstração. Veja ((BREZIS, 2010), Teorema 6.6) \square

Teorema A.11 (Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos com Resolvente Compacto)

Seja $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ um isomorfismo linear autoadjunto tal que A^{-1} é compacto. Então existe uma base ortonormal infinita de autovetores $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ associadas à sequência de autovalores $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$.

Demonstração. Veja ((BORTOLAN, 2021); Teorema 5.3.7). \square

Teorema A.12 (Princípio dos zeros isolados)

Sejam $D \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto conexo, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa não-constante e $z_0 \in D$. Se $f(z_0) = 0$, então existe uma vizinhança de z_0 , $V \subset D$, onde o único zero de f é z_0 .

Demonstração. Veja ((CONWAY, 1978); Corolário 3.10) □

Teorema A.13 (Lema de Nakao)

Sejam $1 < T \leq +\infty$ e $f : [0, T] \rightarrow (0, +\infty)$. Se existem constantes $k_0, k_1 > 0$ tais que:

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} f(s) \leq k_0 (f(t) - f(t+1)) + k_1; \quad \forall 0 \leq t \leq T-1,$$

então

$$f(t) \leq \sup_{0 \leq s \leq 1} f(s) \left(\frac{1+k_0}{k_0} \right) e^{-\theta t} + k_1, \quad \forall 0 \leq t \leq T,$$

onde $\theta = \ln \left(\frac{1+k_0}{k_0} \right)$.

Demonstração. Veja ((NAKAO, 2006); Lema 2.1) □

Teorema A.14 (Teorema de Carathéodory)

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto regular e $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz as *condições de Carathéodory*:

- (i) $u \mapsto f(x, u)$ é contínua para quase todo ponto $x \in \Omega$.
- (ii) $x \mapsto f(x, u)$ é mensurável em quase todo ponto $u \in \mathbb{R}^m$.
- (iii) Existe $p > 1$ e uma função $g \in L^q(\Omega)$, como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tais que:

$$|f(x, u)| \leq c|u|^{p-1} + g(x); \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}^m \quad (c > 0).$$

Então, dada uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, o *operador de Nemytskii*, $\mathcal{F} : L^p(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ definido por:

$$\mathcal{F}(u)(x) := f(x, u(x))$$

é contínuo e limitado (leva conjuntos limitados em conjuntos limitados).

Demonstração. Veja ((RENARDY; ROGERS, 2004); Página 370) □

Artigos publicados:

1. DE JESUS, R. O.; RAPOSO, C. A. ; RIBEIRO, J. O. ; VILLAGRAN, O. V. . Timoshenko System with Internal Dissipation of Fractional Derivative Type. *Journal of Applied Analysis and Computation*, v. 15, p. 1146-1169, 2025.
2. JESUS, RAFAEL O. DE; RAPOSO, CARLOS A. ; NONATO, CARLOS A. ; RIBEIRO, JOILSON O. . Well-posedness and asymptotic behavior of a suspension bridge system of Timoshenko-Ehrenfest type with fractional derivative damping. *ACTA MECHANICA*, <https://doi.org/10.1007/s00707-025-04486-4>, 2025.

Artigos aceitos:

1. De JESUS, R. O. ; FREITAS, M. M. ; RAPOSO, C. A. ; NONATO; C. A. . Existence of global solution and global attractor for a suspended bridge system of Kirchhoff type with fractional derivative damping. *Journal Of Evolution Equations* <https://doi.org/10.1007/s00028-025-01167-6>, 2025.
2. RAPOSO, C. A. ; CORREIA, J. N. ; GORAIN, G. C. ; DE JESUS, R. O. . Suspension bridge with non-homogeneous flexible structure. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, <https://doi.org/10.1007/s41980-025-01004-z>, 2025.

Universidade Federal da Bahia

Instituto de Matemática e Estatística / Programa de Pós-Graduação em Matemática

Campus Universitário de Ondina, Av. Ademar de Barros s/n. Salvador-BA. CEP 40.170-110

www.pgmat.ufba.br